GLoLo

Induktion:

- über nat. Zahlen: IA: $P(0)$
  IS: $\forall n \in \mathbb{N}(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ mit $P(n)$ als IV
- Course-of-Values: $P(n)$ Aussage über nat. Zahlen
  Wenn $(\forall n\, (\forall k < n\, (P(k))) \Rightarrow P(n))$, so gilt P für jede nat. Zahl $(\forall n\, (P$
- strukturelle (für aussagenlog. Formeln): IA: $P(\bot)$, $P(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$
  IS: wenn $P(\phi)$, dann auch $P(\neg\phi)$, und wenn $P(\phi)$ und $P(\psi)$, dann auch $P(\phi \wedge \psi)$

Aussagenlogik

$\mathcal{A}$: Atome, nicht weiter unterteilbare Aussagen

Atome $At(\varphi)$ einer Formel:
$At(A) = \{A\}$
$At(T) = \emptyset$
$At(\neg\phi) = At(\phi)$
$At(\varphi \wedge \psi) = At(\varphi) \cup At(\psi)$

Syntax $\varphi, \psi ::= \bot \mid A \mid \varphi \wedge \psi \mid \neg\varphi \quad (A \in \mathcal{A})$

mit $T = \neg\bot$; $(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$; $\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$; $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

$\neg$ bindet am stärksten, $\wedge$ stärker als $\vee$, und $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$

$=$ syntaktische Gleichheit, z.B. $A \wedge B \neq B \wedge A$

Wahrheitsbelegung $\kappa: \mathcal{A} \rightarrow \{\bot, T\}$

κ erfüllt φ: $\kappa \models \varphi$ mit $\kappa \not\models \bot$; $\kappa \models T$ stets; $\kappa \models \bot$ nie
$\kappa \models A \Leftrightarrow \kappa(A) = T$; $\kappa \models \neg\varphi \Leftrightarrow \kappa \not\models \varphi$
$\kappa \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \kappa \models \varphi$ und $\kappa \models \psi$; $\kappa \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \kappa \models \varphi$ oder $\kappa \models \psi$
$\kappa \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow$ falls $\kappa \models \varphi$, dann auch $\kappa \models \psi$
$\kappa \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \kappa \models \varphi$ genau dann wenn $\kappa \models \psi$
$\kappa \models \Phi \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi.\ \kappa \models \varphi$

erfüllbar: es ex. eine Wahrheitsbelegung κ mit $\kappa \models \Phi$; T kommt als Wert in der Wahrheitstafel vor

gültig: $\kappa \models \Phi$ für alle Wahrheitsbelegungen κ ; alle Werte der Wahrheitstafel T sind

log. äquivalent $\phi \equiv \psi$, wenn $\phi \leftrightarrow \psi$ gültig ist ; in der gem. Wahrheitstafel in jeder Zeile den gleichen Wert haben

log. Folgerung für jede Wahrheitsbel. κ mit $\kappa \models \Phi$ gilt auch $\kappa \models \psi$ $(\Phi \models \psi)$; in gem. WT hat ψ Wert T, wenn alle $\varphi \in \Phi$ ebenfalls Wert T

$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ $\quad \neg(\varphi \wedge/\vee\, \psi) \equiv (\neg\varphi \vee/\wedge \neg\psi)$ $\quad \varphi \wedge T \equiv \varphi$ $\quad \varphi \vee \bot = \varphi$ $\quad \varphi \wedge \psi = \psi \wedge \varphi$ $\quad \varphi \wedge \varphi = \varphi$

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\quad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ $\quad (\varphi \wedge/\vee\, \psi) \wedge/\vee\, \chi = \varphi \wedge/\vee\, (\psi \wedge/\vee\, \chi)$

Korrektheit $\phi \vdash \psi \Rightarrow \phi \models \psi$

Vollständigkeit $\phi \models \psi \Rightarrow \phi \vdash \psi$

Konsistent $\Phi \nvdash \bot$, dh. wenn sich aus Φ kein Widerspruch herleiten lässt.
Φ maximal konsistent: 1. Φ konsistent 2. Ψ konsistent und $\Phi \subseteq \Psi \Rightarrow \Phi = \Psi$
↳ 1. $\bot \notin \Phi$
2. $\neg\psi \in \Phi \Leftrightarrow \psi \notin \Phi$
3. $\phi \wedge \psi \in \Phi \Leftrightarrow \phi \in \Phi$ und $\psi \in \Phi$

$\kappa \models \psi \Leftrightarrow \psi \in \Phi$

Kompaktheit: Sei Φ eine Formelmenge, sodass alle endl. Teilmengen $\phi_0 \in \Phi$ erfüllbar sind. Dann ist Φ erfüllbar

Prädikatenlogik erster Stufe II – first-order-logic (FOL)

Syntax $\Sigma = (P_\Sigma, F_\Sigma)$ mit P_Σ Menge von Prädikaten(symbole) (Großbuchst.) und F_Σ Menge von Funktion(ssymbol)en (Kleinbuchst.)

Funktionen und Prädikate haben endl. Stelligkeit $ar(s) \geq 0$. Für $ar(s) = n$ $s/n \in \Sigma$. $c/0 \in \Sigma$ heißt Konstante

Term $E ::= x \mid f(E_1, \dots, E_n)$ $\quad x \in V$ (Variablen), $f/n \in \Sigma$

Formeln $\phi ::= E = D \mid P(E_1, \dots, E_n) \mid \neg\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \forall x(\phi)$ $\quad x \in V,\ P/n \in \Sigma$ $\qquad \exists x(\phi) := \neg\forall x(\neg\phi)$

Alle Ps sind Qs: $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ $\qquad$ Einige Ps sind Qs: $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

Freie Variable
$FV(x) = \{x\}$
$FV(f(E_1, \dots E_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$
$FV(E = D) = FV(E) \cup FV(D)$
$FV(P(E_1, \dots, E_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$

$FV(\neg\phi) = FV(\phi)$
$FV(\phi \wedge \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$
$FV(\forall x(\phi)) = FV(\phi) \setminus \{x\}$

Satz: ϕ ist Satz, wenn $FV(\phi) = \emptyset$

Substitution Abbildg σ, die jeder Variablen x einen Term $\sigma(x)$ zuordnet $\qquad$ Umbenennung, wenn $\sigma(x)$ für alle x eine Variable ist

$x\sigma = \sigma(x)$
$f(E_1, \dots, E_n)\sigma = f(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma)$
$(E = D)\sigma = (E\sigma = D\sigma)$
$P(E_1, \dots, E_n)\sigma = P(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma)$

$(\neg\phi)\sigma = \neg(\phi\sigma)$
$(\phi \wedge \psi)\sigma = \phi\sigma \wedge \psi\sigma$
$(\forall x(\phi))\sigma = \forall y(\phi\sigma')$ $\quad$ wobei $\sigma'(x) = y$, $\sigma'(z) = \sigma(z)$ und y so gewählt, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x(\phi))$

$(\sigma\tau)(x) = (\sigma(x))\tau$, also zuerst σ, dann τ

Σ-Modell $\mathcal{M}$ mit
- nichtleerer Menge M
- Interpretation in $\mathcal{M}$ für jedes n-stellige Fkt.-symbol $f/n \in \Sigma$, geg. durch $\mathcal{M}[\![f]\!] : M^n \to M$
- Interpretation in $\mathcal{M}$ für jedes n-stellige Präd.-symbol $P/n \in \Sigma$, geg. durch eine Teilmenge $\mathcal{M}[\![P]\!] \subseteq M^n$

Umgebung η: Abb. η: $V \to M$, ordnet jeder Var. $v \in V$ einen Wert $\eta(v)$ im Universum M zu

Interpretation $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta \in M$ mit $\mathcal{M}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$, $\mathcal{M}[\![f(E_1, \dots, E_n)]\!]\eta = \mathcal{M}[\![f]\!](\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta, \dots, \mathcal{M}[\![E_n]\!]\eta)$

Erfülltheit $\mathcal{M}, \eta \models \phi$ mit
$\mathcal{M}, \eta \models (E = D) \iff \mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \mathcal{M}[\![D]\!]\eta$
$\mathcal{M}, \eta \models P(E_1, \dots, E_n) \iff (\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta, \dots, \mathcal{M}[\![E_n]\!]\eta) \in \mathcal{M}[\![P]\!]$
$\mathcal{M}, \eta \models \forall x(\phi) \iff$ für alle $m \in M$ gilt $\mathcal{M}, \eta[x \mapsto m] \models \phi$

Es gilt $\mathcal{M}, \eta \models \phi\sigma \iff \mathcal{M}, \eta_\sigma \models \phi$ mit $\eta_\sigma(x) = \mathcal{M}[\![\sigma(x)]\!]\eta$ für $x \in V$

Unifikation Substitution σ ist Unifikator von $E \doteq D$, wenn $E\sigma = D\sigma$
σ_1 ist allgemeiner als σ_2 (und σ_2 ist Spezialisierung von σ_1), wenn τ ex. mit $\sigma_1\tau = \sigma_2$

mgu: σ ist most general unifier, wenn σ allgemeiner als jeder Unifikator ~~ist~~
$\sigma \in Unif(S) \Rightarrow \sigma\tau \in Unif(S)$
Wenn $S' = \{x_1 \doteq E_1, \dots, x_n \doteq E_n\}$ gelöste Form von S ist, dann gilt $[E_1/x_1, \dots, E_n/x_n] = mgu(S)$

Algorithmus:
- (delete) $S \cup \{x \doteq x\} \to S$
- (decomp) $S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq f(D_1, \dots, D_n)\} \to S \cup \{E_1 \doteq D_1, \dots, E_n \doteq D_n\}$
- (conflict) $S \cup \{f(E_1, \dots, E_n) \doteq g(D_1, \dots, D_k)\} \to \bot$ (für $f \neq g$)
- (orient) $S \cup \{E \doteq x\} \to S \cup \{x \doteq E\}$ (E keine Var.)
- (occurs)/(elim) $S \cup \{x \doteq E\} \to \begin{cases} \bot & (x \in FV(E), x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \doteq E\} & (x \notin FV(E), x \in FV(S)) \end{cases}$

$\hookrightarrow$ $\bot$ erreicht: „nicht unifizierbar"
sonst: gelöste Form, also mgu von S

Aristotelische Formeln Alle Ps sind Qs: $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$
Einige Ps sind Qs: $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$

(∧I) $\dfrac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}$ (∧E1) $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}$ (∧E2) $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}$

(∨I1) $\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}$ (∨I2) $\dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}$ (∨E) $\dfrac{\begin{array}{|l} \phi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array} \qquad \phi \vee \psi}{\chi}$

(¬I) $\dfrac{\begin{array}{|l} \phi \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg \phi}$ (¬E) $\dfrac{\neg\neg \phi}{\phi}$

(⊥I) $\dfrac{\phi \qquad \neg \phi}{\bot}$ (⊥E) $\dfrac{\bot}{\phi}$

(→I) $\dfrac{\begin{array}{|l} \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \to \psi}$ (→E) $\dfrac{\phi \to \psi \qquad \phi}{\psi}$

(=I) $\dfrac{}{E = E}$ (=E) $\dfrac{\phi[E/x] \qquad E = D}{\phi[D/x]}$

(∀I) $\dfrac{\begin{array}{|l} \boxed{c} \\ \vdots \\ \phi[c/x] \end{array}}{\forall x(\phi)}$ (∀E) $\dfrac{\forall x (\phi)}{\phi[E/x]}$

(∃I) $\dfrac{\phi[E/x]}{\exists x(\phi)}$ (∃E) $\dfrac{\exists x(\phi) \qquad \begin{array}{|l} \boxed{c} \; \phi[c/x] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}$

$(A \to B) \to C \vDash A \vee C$

$\neg(A \to \neg B) \vDash A \to B$

$A \to C \vDash \neg(C \to A)$

Resolution

CNF:

(Res) $$\frac{C_1 \cup \{A\} \qquad C_2 \cup \{\neg A\}}{C_1 \cup C_2}$$

Verfahren: Eingabe CNF ϕ

Ausgabe: „ja", wenn ϕ erfüllbar, „nein" sonst

1. If $\square \in \phi$ return „nein"
2. Suche $C_1 \cup \{A\}, C_2 \cup \{\neg A\} \in \phi$, $C_1 \cup C_2 \notin \phi$. Falls keine solchen ex. return „ja"
3. $\phi := \phi \cup \{C_1 \cup C_2\}$
4. goto 1

FOL:

(RIF) $$\frac{C_1, A_1, \dots, A_n \qquad C_2, \neg B}{C_1\sigma, C_2\sigma}$$ $(\sigma = \mathrm{mgu}(A_1, \dots, A_n, B))$

Bew. der Gültigkeit einer Formel ϕ

1. Bilde $\neg\phi$
2. Transformiere $\neg\phi$ in Klauselform
3. Wende RIF an, bis $\square$ erreicht ist

Normalformen II

Negationsnormalform (NNF): $\phi, \psi ::= \bot \mid \top \mid A \mid \neg A \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \qquad A \in \mathcal{A}$

Umformungen:

$\neg\neg\phi \equiv \phi \qquad \neg\top \equiv \bot$

$\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi \qquad \neg\bot \equiv \top$

$\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$

Konjunktive Normalform (CNF):

$L ::= A \mid \neg A \qquad A \in \mathcal{A}$ — Literale

$C ::= \bot \mid neC$ — Klauseln

$neC ::= L \mid L \vee neC$

$\phi ::= \top \mid \psi$ — CNFs

$\psi ::= C \mid C \wedge \psi$

Umformungen von NNF:

$CNF(\phi \wedge \psi) = CNF(\phi) \wedge CNF(\psi)$

$CNF((\phi \wedge \psi) \vee \chi) = CNF(\phi \vee \chi) \wedge CNF(\psi \vee \chi)$

$CNF(\phi) = \phi$

Pränexe Normalform: $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n . \phi$ mit $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ und ϕ quantorenfrei

Umformungen von NNF:

$\phi \wedge \exists x(\psi) \equiv \exists x(\phi \wedge \psi) \qquad \phi \wedge \forall x(\psi) \equiv \forall x(\phi \wedge \psi) \qquad x \notin FV(\phi)$

$\phi \vee \exists x(\psi) \equiv \exists x(\phi \vee \psi) \qquad \phi \vee \forall x(\psi) \equiv \forall x(\phi \vee \psi) \qquad$ (Umbenennung der gebundenen Variable)

Skolemform pränexe Normalform, die nur Allquantoren enthält

Umformung: $\forall x_1, \dots \forall x_n \exists y(\phi) \rightsquigarrow \forall x_1, \dots, \forall x_n (\phi[f(x_1, \dots, x_n)/y])$

Klauselform Skolemform ohne führende Quantoren ~~zuvor~~ in CNF gebracht

$\Sigma = \{fst/2, snd/2\}$ $\quad \mathcal{M}[\![fst]\!](x,y) = x$ $\quad \mathcal{M}[\![snd]\!](x,y) = y$

zz: für jeden Term E mit $FV(E) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ex. $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass für alle Umgebungen η gilt, dass $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \eta(x_i)$, also $\mathcal{M} \models \forall x_1, \dots, x_n . E = x_i$

IA: $E = X \Rightarrow FV(E) = \{X\}$, $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \eta(x)$

IV: $\forall E \; \exists i \in [1, \dots, |FV(E)|] \wedge \forall \eta \; \mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \eta(x_i)$ mit $x_i \in FV(E)$

IS: fst: $E = fst(A,B) \Rightarrow FV(E) = FV(A) \cup FV(B)$

$\mathcal{M}[\![E]\!] = \mathcal{M}[\![fst(A,B)]\!] = \mathcal{M}[\![fst]\!](\mathcal{M}[\![A]\!]\eta, \mathcal{M}[\![B]\!]\eta) = \mathcal{M}[\![A]\!]\eta$

$\overset{IV}{=} \eta(A_j)$ mit $j \in \{1, \dots, |FV(A)|\}$ und $A_j \in FV(A)$

$FV(A) \subseteq FV(E) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, |FV(E)|\} \; \forall \eta . \; \mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \eta(x_i)$ mit $x_i \in FV(E)$

snd: $E = snd(A,B) \Rightarrow FV(E) = FV(A) \cup FV(B)$

$\mathcal{M}[\![E]\!] = \mathcal{M}[\![snd(A,B)]\!] = \mathcal{M}[\![snd]\!](\mathcal{M}[\![A]\!]\eta, \mathcal{M}[\![B]\!]\eta) = \mathcal{M}[\![B]\!]\eta$

$\overset{IV}{=} \eta(B_j)$ mit $j \in \{1, \dots, |FV(B)|\}$ und $B_j \in FV(B)$

$FV(B) \subseteq FV(E) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, |FV(E)|\} \; \forall \eta . \; \mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \eta(x_i)$ mit $x_i \in FV(E)$

$(A \wedge C) \vee (\neg C \wedge \neg B) \models (A \wedge B) \rightarrow \neg A$

GLoIn

Datum

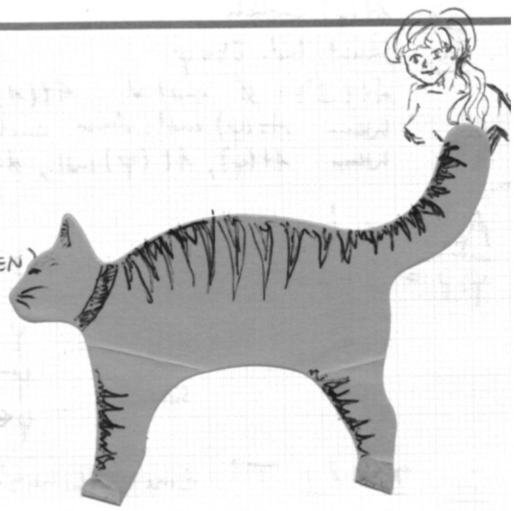
Name/Projekt

- Übungsanmeldung … mein Campus
  Bonuspunkte
- Prüfung 90 min, … Hilfsmittel

… Barwise, Etchemendy: Language, Proof & Logic
Huth, Ryan: Logic in Computer Science

Installieren: Coq

methodpark



Logik in der Inform…

- Logik als Problem (Aufgaben)
  - ↳ SAT (Erfüllbarkeitsproblem d. Aussagenlogik)
  - ↳ (Halb-) automatisches Theorembeweisen (Isabelle/HOL)
- Logik als Programmierparadigma (Prolog, Mercury)
- Logik als Abfrageformalismus (SQL ≙ Prädikatenlogik erster Stufe, Datalog)
- Logische Wissensrepräsentation (Semantic Web, OWL, Bioontologien GENE-ONTO, SNOMED, GALEN)

Logik in der Softwareentwicklung

Spezifikation ← Logik

$\models$ ← Erfülltheits Relation

Code ← Modell

Aussagenlogik

- atomare Aussagen $A, B, C, \dots$, Wahrheitswerte $\bot$ (falsch), $\top$ (wahr)
- Junktoren $\land, \lor, \neg, \to, \leftrightarrow$
- suche: äquivalente, stärkere, schwächere
  ↳ Bedingung verstärkt, Aussage abgeschwächt

Malle $\land \neg$ Creme $\to$ Sonnenbrand
$\neg S \to \neg M \lor C$ äq.
$M \to S$ stärker

Induktion

Natürliche Zahlen: Wenn folgendes gilt für Eig. P von nat. Zahlen
1) Induktionsanfang: $P(0)$
2) Induktionsschritt: $\forall n$ folgt $P(n+1)$ aus $P(n)$ ← Induktionsvoraussetzung

dann gilt $P(n)\ \forall n$

Course of Values-Induktion: Wenn für jedes n aus $\forall k<n\ P(k)$ schon $P(n)$ folgt, dann gilt $P(n)\ \forall n$

Beweis: Sei P mit $\forall n\ (\forall k<n.\ P(k)) \to P(n)$ (+) z.z. $\forall n\ P(n)$

Verstärkung des Induktionsziels: zu $\forall n\ \forall k \leq n\ P(k)$

IA: Es gilt $\forall k<0\ P(k)$, also per (+) $P(0)$, also $\forall k \leq 0\ P(k)$

IS: Sei $\forall k \leq n\ P(k)$. z.z. $\forall k \leq n+1\ P(k)$, reicht also $P(n+1)$, nach (+) reicht $\forall k < n+1.\ P(k)$ fertig!

Bew. von ∃ PFZ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sei $n \in \mathbb{N}$.
1) n prim
2) a) $n = 1$
   b) $n = mk\quad m,k \notin \{1,n\}$
   Nach IV: $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, $k = q_1 \cdot \ldots \cdot q_l$ $\quad p_i, q_i$ prim $\Rightarrow n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_l$

Grammatik / BNF

Alphabete T terminale Symbole, N nicht terminale Symbole, hier $N = \{n\}$

BNF: $n ::= B_1 \mid \ldots \mid B_m \quad B_i \in (N \cup T)^*$

Alternativen

Lies B_i als Regel: ($B_i = w_0 n w_1 n \ldots n w_k \quad w_i \in T^*$)

- wenn $v_1, \ldots, v_k$ Instanzen von n sind, dann auch $w_0 v_1 w_1 \ldots v_k w_k$ Instanz v. …

Induktiv, d.h. w Instanz von n, wenn dies in endl. vielen Schritten herleitbar ist.

Bsp: $n ::= z \mid s(n)$ Instanzen von n: z, also $s(z), s(s(z)), \ldots$

$\hat{=}$ T … nat. Zahlen!

2 Namen → phi psi $\varphi, \psi ::= \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \land \psi \mid A$ (künftig Klammern) ($A \in \mathcal{A}$) Menge der propositionalen Atome

- $\bot$, A sind Formeln
- φ Formel $\to \neg\varphi$ auch
- φ, ψ Formel $\to \varphi \land \psi$ auch

BNF liefert strukturelle Induktion: Wenn für alle $B_i = w_0 n \ldots n w_k$ aus $P(v_1) \land \ldots \land P(v_k)$ für Instanzen $v_1 \ldots v_k$ von n $P(w_0 v_1 \ldots v_k w_k)$ folgt, dann gilt P ∀ Instanzen von n.

IS für Formeln:
- $P(\bot), P(A)$
- $P(\varphi) \Rightarrow P(\neg\varphi)$
- $P(\varphi) \land P(\psi) \Rightarrow P(\varphi \land \psi)$

Strukturelle Rekursion

zB. $At(\varphi) \subseteq \mathcal{A}$ $\quad At(\bot) = \emptyset$
$At(A) = \{A\}$
$At(\neg\varphi) = At(\varphi)$
$At(\varphi \wedge \psi) = At(\varphi) \cup At(\psi)$

Beh: $At(\varphi)$ endlich

Bew: Strukt. Ind. über φ

$At(\bot) = \emptyset$ endl ✓ $\quad At(A) = \{A\}$ endl ✓

Wenn $At(\varphi)$ endl, dann auch $At(\neg\varphi)$ endl $= At(\varphi)$

Wenn $At(\varphi)$, $At(\psi)$ endl., dann auch $At(\varphi \wedge \psi) = At(\varphi) \cup At(\psi)$ endl.

Aussagenlogik

$\varphi, \psi ::= \bot \mid A \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi$ $\quad (A \in \mathcal{A})$ $\quad \neg$ bindet am stärksten

Syntax

$\top = \neg\bot$

$\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ „oder" (inklusiv)

Antezedenz, Sukzedens: $\varphi \to \psi = \neg\varphi \vee \psi$ „impliziert", (materielle) Implikation

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ „äquivalent zu", Biimplikation

Def: $2 = \{\bot, \top\}$ Eine Wahrheitsbelegung (WB) ist eine Abb. $K : \mathcal{A} \to 2$

Erfülltheit $\models$: $K \models \varphi$ „K erfüllt φ" def per strukturelle Rekursion über φ:

$K \not\models \bot$

$K \models A \iff K(A) = \top$

$K \models \neg\varphi \iff K \not\models \varphi$

$K \models \varphi \wedge \psi \iff K \models \varphi$ und $K \models \psi$

Also: $K \models \varphi \vee \psi \iff K \models \varphi$ oder $K \models \psi$

$K \models \varphi \to \psi \iff$ (falls $K \models \varphi$, dann auch $K \models \psi$)

$K \models \varphi \leftrightarrow \psi \iff (K \models \varphi$ gdw $K \models \psi)$

$K \models \top$ $\quad$ (denn: $K \models \top \iff K \models \neg\bot \iff K \not\models \bot$)

Bsp: Sei $K(A) = \top$, $K(B) = \bot$

$K \models (A \vee \neg B) \to B \iff$ (falls $K \models A \vee \neg B$, dann $K \models B$)

ja, da $K \models A$ $\quad$ nein, $K(B) = \bot$

also $K \not\models (A \vee \neg B) \to B$

Sei $K_2(A) = \top$, $K_2(B) = \top$, dann $K_2 \models (A \vee \neg B) \to B$

Φ Menge von Formeln: $K \models \Phi :\iff \forall \varphi \in \Phi, K \models \varphi$

Def: - Φ erfüllbar $\iff$ es ex. WB K mit $K \models \Phi$

- φ gültig $\iff \neg\varphi$ unerfüllbar $\iff \forall K : K \models \varphi$ (Tautologie)
- φ, ψ logisch äquivalent $\iff \varphi \leftrightarrow \psi$ gültig
- ψ ist logische Folgerung/Konsequenz aus $\Phi \iff \forall K$ gilt: wenn $K \models \Phi$, dann $K \models \psi$ $\to$ $\Phi \models \psi$

Lemma: - φ erfüllbar $\iff \neg\varphi$ nicht gültig

- $\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar
- Φ erfüllbar $\iff \Phi \not\models \bot$

Bsp: erfüllbar: $A \to \neg A$ mit $K(A) = \bot$

gültig: $A \vee \neg A$

unerfüllbar: $A \wedge \neg A$

log Folgerung: $\{A, A \to B\} \models B$ modus ponens

Wahrheitstafeln

Wahrheitstafel = tabellarische Auflistung der Wahrheitswerte ($\hat{=}$ Erfülltheit) einer Formel in Abh. von WB (der vorkommenden Atome)

- φ gültig $\iff$ <u>alle</u> Werte von φ in WT $\top$
- φ erfüllbar $\iff$ mind. 1 Wert $\top$
- $\varphi \equiv \psi \iff \varphi, \psi$ haben in allen Zeilen der gemeinsamen WT gleiche Werte
- $\Phi \models \psi \iff$ in jeder der WT, in der alle $\varphi \in \Phi$ Wert $\top$ haben, hat auch ψ Wert $\top$

Bsp: $\neg(A \to B) \models A$

A	B	$\neg(A \to B)$	A
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$ ✓
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

log. Äquivalenzen

$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ $\quad$ Doppelnegationselimination

$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\quad \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ $\quad \}$ De Morgan

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\quad$ (psi chi)

$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$

$(\varphi \wedge/\vee \psi) \wedge/\vee \chi \equiv \varphi \wedge/\vee (\psi \wedge/\vee \chi)$

$\varphi \wedge/\vee \psi \equiv \psi \wedge/\vee \varphi$

$\varphi \wedge \top \equiv \varphi$

$\varphi \vee \bot \equiv \varphi$

$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$ $\quad$ Idempotenz

Formale Deduktion

- Axiome
- Regeln: $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$ (Seitenbedingung)
- Hilbert: fast nur Axiome
- Gentzen: fast nur Regeln: Regeln über Sequenten. $\varphi_1, \ldots, \varphi \vdash \psi_1, \ldots, \psi_k$ ($\wedge$, $\rightarrow$, $\vee$)

  Axiome: $\ldots, \varphi, \ldots \vdash \ldots, \varphi, \ldots$

- natürliches Schließen: $k = 1$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ implizit

Bsp Konjunktion Logik:

$(\wedge I)\ \dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$ — $(\wedge E1)\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ $(\wedge E2)\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$

zB $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$

Annahmen — Herleitbarkeit

$$\dfrac{(\wedge E2)\ \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge E1)}{\psi \wedge \varphi}\ (\wedge I)$$

1	$\varphi \wedge \psi$	
2	ψ	$(\wedge E2)$, 1
3	φ	$(\wedge E1)$, 1
4	$\psi \wedge \varphi$	$(\wedge I)$, 2, 3

ex falso quod libet

mit $\bot, \neg$:

$(\neg I)\ \dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}$ lokale Annahme, Unterbeweis — $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg E)$

$(\bot I)\ \dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}$ — $(\bot E)\ \dfrac{\bot}{\varphi}$

Linearisierung: Unterbeweis

25	φ
$\vdots$	$\vdots$
28	$\bot$
29	$\neg\varphi$

$(\rightarrow E)\ \dfrac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$

~~$(\rightarrow I)$~~ $(\rightarrow I)\ \dfrac{\begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}$

$(\vee I_1)\ \dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ $(\vee I_2)\ \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$ — $(\vee E)\ \dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}$

Herleitung von z.B. $(\rightarrow I)$ bei $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

1		
2	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi$	
3	$\neg\neg\varphi$	$(\wedge E1)$ 2
4	φ	$(\neg E)$ 3
	$\vdots$	Prämisse
4+k	ψ	
5+k	$\neg\psi$	$(\wedge E2)$ 2
6+k	$\bot$	$(\bot I)$ 4+k, 5+k
	$\neg(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$(\rightarrow E)$ 2, –, 6+k

$(\rightarrow E)$ bei $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

1	φ	
2	$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	
3	$\neg\varphi$	
4	$\bot$	$(\bot I)$ 1, 3
5	ψ	$(\bot E)$ 4
6	ψ	
7	ψ	„Reiteration"
8	ψ	$(\vee E)$ 2, 3–5, 6–7

Normalform

- **Negationsnormalform** $\varphi, \psi ::= \bot \mid \top \mid A \mid \neg A \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi$ $\qquad \varphi'$ NNF von $\varphi \Leftrightarrow$ (i) φ' NNF (ii) $\varphi' \equiv \varphi$

<u>Satz:</u> Jede Formel hat eine NNF

<u>Bew:</u> Per Umformungen $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ & $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ & $\neg\bot \equiv \top$ & $\neg\top \equiv \bot$ & $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

<u>Bsp:</u> $\neg((A \vee \neg B) \wedge C) \equiv \neg(A \vee \neg B) \vee \neg C \equiv (\neg A \wedge \neg\neg B) \vee \neg C \equiv ((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$

- **Konjunktive Normalform**

Literale: $L ::= A \mid \neg A$

Klauseln: $C ::= \bot \mid neC$

$neC ::= L \mid L \vee neC$

Allg. Form: $\underbrace{\bigwedge_{i=1}^{n} \underbrace{\bigvee_{j=0}^{k} \underbrace{L_{ij}}_{\text{Literale}}}_{\text{Klauseln}}}_{\text{CNF}}$

Alternativ:
Klausel = endl. Menge von Literalen
CNF = " " " Klauseln

CNFs: $p ::= \top \mid \varphi$

$\varphi ::= C \mid C \wedge \varphi$

<u>Satz:</u> Jede Formel hat eine CNF $\qquad |CNF(\varphi)| = O(2^{|\varphi|})$

<u>Def:</u> CNF $CNF(\varphi)$ von φ rekursiv

$CNF(\varphi \wedge \psi) = CNF(\varphi) \wedge CNF(\psi)$ (1)

$CNF((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) = CNF(\varphi \vee \chi) \wedge CNF(\psi \vee \chi)$ (2)

$CNF(C) = C$ (3)

Matcht immer, modulo AC

Fall 1: oberstes Konnektiv $\wedge$ -> (1) matcht

Fall 2 " " $\vee$

a) Formel enthält noch $\wedge$ => (2) matcht nach Umformung (Assoc., Komm.)

b) (3) matcht

Resolution

Input: CNF φ in Mengendarstellung. Output: „ja" wenn φ erfüllbar, „nein" sonst

$$\frac{\overset{\neg C \to A}{C \cup \{A\}} \qquad \overset{A \to D}{\{\neg A\} \cup D}}{\underset{\neg C \to D}{C \cup D}}$$

<u>Lemma:</u> Sei $C \cup \{A\}, \{\neg A\} \cup D \in \varphi \Rightarrow \varphi \models C \cup D$ (Insbes. dann φ erfüllbar $\Leftrightarrow \varphi \cup \{C \cup D\}$ erfüllbar)

<u>Alg:</u> Missbrauche φ als globale Var.

1. if $\square \in \varphi$ then return "nein"
2. Suche $C \cup \{A\}, \{\neg A\} \cup D \in \varphi$, $\not\ni C \cup D$ falls nicht gefunden => return "ja"
3. $\varphi := \varphi \cup \{C \cup D\}$
4. goto 1

<u>Bsp:</u> $\varphi = \{\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}\}$

$\{D, B\}$ — $\{B\}$ $\qquad \{C, \neg A\}$ — $\{\neg B\}$

$\square$

$\varphi = \{A, \neg B\}, \{A, B\}$

$\{A\}$

Terminierung: es gibt über n Atomen nur 4^n Klauseln

Korrektheit („nein" ist richtig): per Lemma oben ✓

7.10.14
VL

Resolution

$$\frac{C \cup \{A\} \qquad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D} \text{ (Res)}$$

$\square \in \varphi \to$ nein

$\underbrace{\forall C, D, A.\ C \cup \{A\}, \{\neg A\} \cup D \in \varphi \Rightarrow C \cup D \in \varphi}_{\varphi \text{ resolutionsabgeschlossen (ra)}} \to$ ja

e-mobil BW
Landesagentur für Elektromobilität und Brennstoffzellentechnologie Baden-Württemberg GmbH

Vollständigkeit: Antwort „ja"

Es reicht z.z.: φ ra, $\square \notin \varphi \Rightarrow \varphi$ erfüllbar

Bew: Induktion über $|At(\varphi)|$

IA: $At(\varphi) = \emptyset$: $\varphi = T$ mögl. CNF: $\emptyset = T$

IS: Sei $A \in At(\varphi)$. Setze $\varphi/A = \{D \setminus \{\neg A\} \mid A \notin D \in \varphi\}$ $\quad A \notin At(\varphi/A), At(\varphi/\neg A)$

$\varphi/\neg A = \{D \setminus \{A\} \mid \neg A \notin D \in \varphi\}$

Beh 1: φ erfüllbar $\Leftrightarrow \varphi/A$ erfüllbar oder $\varphi/\neg A$ erfüllbar

Bew: zB sei φ/A erfüllbar, $K \models \varphi/A$, o.E. $K(A) = T$

Sei $D \in \varphi$, z.z. $K \models D$ $\quad$ Fall 1: $A \in D \Rightarrow K \models D$

Fall 2: $A \notin D \Rightarrow D \setminus \{\neg A\} \in \varphi/A$

$\Rightarrow K \models D \setminus \{\neg A\} \Rightarrow K \models D$ ✓

Beh. 2 φ/A, $\varphi/\neg A$ ra

Bew zB. φ/A. Sei $E_1 \cup \{B\}, E_2 \cup \{\neg B\} \in \varphi/A$ $\quad (B \neq A)$

$\Rightarrow E_1 = C_1 \setminus \{\neg A\}, E_2 = C_2 \setminus \{\neg A\}, \underbrace{C_1 \cup \{B\}, C_2 \cup \{\neg B\} \in \varphi}_{A \notin}$

$\overset{\varphi \text{ r.a.}}{\Rightarrow} \underbrace{C_1 \cup C_2}_{A \notin} \in \varphi \Rightarrow E_1 \cup E_2 = C_1 \cup C_2 \setminus \{\neg A\} \in \varphi/A$

Beh. 3 $\square \notin \varphi/A \vee \square \notin /\neg A$

Bew Sonst $\{\neg A\}, \{A\} \in \varphi \underset{\varphi\, ra}{\Rightarrow} \square \in \varphi$ ↯

o.E. $\square \notin \varphi/A \underset{\text{Beh 2, IV}}{\Rightarrow} \varphi/A$ erfüllbar $\underset{\text{Beh 1}}{\Rightarrow} \varphi$ erfüllt.

ND: Korrektheit und Vollständigkeit

Recall: $\Phi \models \varphi$ (log. Folgerung) $\qquad \Phi \vdash \varphi$ (herleitbar)

Korrektheit: $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$

Vollständigkeit: $\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$

Korrektheit: Bew: Ind. über Höhe (CoV über Größe), Fallunterscheidung über letzte Regel

Per IV: $\Phi' \cup \{\varphi\} \models \bot \Rightarrow \Phi' \cup \{\varphi\}$ unerfüllbar $\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \Phi \models \neg\varphi$ $\quad$ Φ, Φ', φ, $\bot$, $\neg\varphi$ (GI)

Vollständigkeit: Bew: Def: Φ konsistent $\Leftrightarrow \Phi \nvdash \bot$ $\qquad$ zB $\{A, \neg A\}$ inkonsistent

NB Φ erfüllbar $\Rightarrow \Phi$ kons.

Für Vollständigkeit reicht Φ kons $\Rightarrow \Phi$ erfüllbar ist.

Denn dann: $\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar $\underset{A}{\Rightarrow} \Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \underset{(GI)}{\Rightarrow} \Phi \vdash \neg\neg\varphi$

$\underset{(\neg E)}{\Rightarrow} \Phi \vdash \varphi$

Def Φ maximal konsistent $\Leftrightarrow$ (i) Φ konsistent

(ii) $\forall \Psi.\ \Phi \subseteq \Psi \wedge \Psi$ konsistent $\Rightarrow \Phi = \Psi$

Lindenbaumlemma Φ kons $\Rightarrow$ ex. $\bar{\Phi} \supseteq \Phi$ max. kons.

Bew: Sei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ Aufzählung aller Formeln

Setze $\Phi_0 = \Phi$

$$\Phi_{n+1} = \begin{cases} \Phi_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls kons.} \\ \Phi_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{sonst} \leftarrow \text{kons.} \end{cases}$$

Wenn $\Phi_n \cup \{\varphi_n\}$ nicht kons, dann $\Phi_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ kons! $\to \bar{\Phi} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n$ kons. wegen und max. kons. da nicht noch mehr Formeln hinzugefügt werden können.

www.e-mobilbw.de

<u>Reicht also für A:</u> Φ max. kons. $\Rightarrow$ Φ erfüllbar

Setze $\kappa(A) = T \Leftrightarrow A \in \overline{\Phi}$

<u>Wahrheitslemma:</u> $\kappa \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \overline{\Phi}$ (dann $\kappa \models \overline{\Phi}$, fertig)

<u>Bew</u> Ind. ü. φ, zB. $\neg$:

$\kappa \models \neg\varphi \Leftrightarrow \kappa \not\models \varphi \overset{IV}{\Leftrightarrow} \varphi \notin \overline{\Phi} \Leftrightarrow \neg\varphi \in \overline{\Phi}$ □.

<u>Korollar:</u> $\underbrace{\forall \Phi_0 \subseteq \Phi,\ \Phi_0 \text{ endl},\ \Phi_0 \text{ erfüllbar}}_{\Phi \text{ endl. erfüllbar}} \Rightarrow \Phi$ erfüllb.

k-Färbbarkeit

Prädikatenlogik erster Stufe

First order (predicate) logic (FOL)

Prädikate: $P(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad \leq(n,k) \equiv n \leq k$ $\quad$ <u>Aussagen</u>: A

„erster Stufe": Variablen x für Individuen, Quantoren $\forall x, \exists x$

(„zweiter Stufe": Variablen X für Prädikate, zB Leibniz-Gleichheit $x = y \Leftrightarrow \forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$)

<u>Def:</u> Eine Signatur $\Sigma = (P_\Sigma, F_\Sigma)$ besteht aus

- einer Menge P_Σ von Prädikaten(symbolen)
- einer Menge F_Σ von ~~Funktional~~ Funktionssymbole

$P \in P_\Sigma$ hat Arität $ar(P) \in \mathbb{N}_0$, ebenso $f \in F_\Sigma$

für $P \in P_\Sigma$, $ar(P) = n$ schreibe $P/_n \in \Sigma$, ebenso für $f \in F_\Sigma$

<u>Def:</u> (Σ-) Terme $E, D, \ldots$ durch

$E, D ::= x \mid f(E_1, \ldots, E_n)$ $\qquad (x \in V, f/_n \in \Sigma)$

<u>Bsp:</u> $\Sigma = \{z/_0, s/_1\}$ $\quad s(z), z, s(s(z)), \ldots, x, s(x), s(s(x)), \ldots$

<u>Def:</u> (Σ-) Formeln φ, ψ def. durch

$\varphi, \psi ::= E = D \mid P(E_1, \ldots, E_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \forall x(\varphi)$ $\qquad (P/_n \in \Sigma)$ $\quad \forall x.\, \varphi$

$\exists x(\varphi) := \neg\forall x(\neg\varphi)$, $\quad \forall x(\exists y(\varphi)) \equiv \forall x \exists y(\varphi)$

Bsp: $E/_1$ ist Erlanger, $L/_2$ „mag"

$\forall x\,(E(x) \rightarrow \exists y\,(E(y) \wedge L(x,y)))$

$\exists x\,(E(x) \wedge \forall y\,(E(y) \rightarrow L(y,x)))$

Aristotelische Formeln: Alle Ps sind Qs $\quad \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

Einige Ps sind Qs $\quad \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$

$FV(\varphi)$ Menge der freien Variablen in φ $\qquad \forall x\,(x = x)$

$FV(x) = \{x\}$, $FV(f(E_1, \ldots, E_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$,

$FV(E = D) = FV(E) \cup FV(D)$, $FV(P(E_1, \ldots, E_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(E_i)$

$FV(\varphi) = FV(\neg\varphi)$, $FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$, $FV(\forall x(\varphi)) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$

$FV(P(x,y) \wedge \forall y \exists z(Q(y,w,z))) = \{x, y, w\}$

<u>Def:</u> eine Substitution σ ordnet jedem $x \in V$ einen Term $\sigma(x)$ zu, sodass

$Dom(\sigma) = \{x \in V \mid \sigma(x) \neq x\}$ endlich.

$E\sigma, \varphi\sigma$ rek. def. $\quad x\sigma = \sigma(x)$, $f(E_1, \ldots, E_n)\sigma = f(E_1\sigma, \ldots, E_n\sigma)$

$(E = D)\sigma = (E\sigma = D\sigma)$, $P(E_1, \ldots, E_n)\sigma = P(E_1\sigma, \ldots, E_n\sigma)$, $(\neg\varphi)\sigma = \neg(\varphi\sigma)$,

$(\varphi \wedge \psi)\sigma = \varphi\sigma \wedge \psi\sigma$

$\forall x(\varphi)\sigma = \forall z(\varphi\sigma')$ mit $\sigma'(x) = z$, $\sigma'(y) = \sigma(y)$ $(x \neq y)$ $\quad$ z frisch, d.h. $z \notin FV(\sigma(v))$ für $v \in FV(\varphi) \setminus \{x\}$

$\overline{3}$ $\quad \sigma = [E_1/x_1, \ldots, E_n/x_n]$ $\quad \sigma(v) = \begin{cases} E_i & v = x_i \text{ f.e. } i \\ v & \text{sonst} \end{cases}$

Bsp: $\forall x \ (x = y) \quad \sigma(x) = z \quad \sigma(y) \ \dots$

$\cancel{\forall x \ (x \leq x + y)}$ Variable capture

α - Äquivalenz: gebundene Variablen können umbenannt werden

$\forall x \ (x \leq y)$ „$\equiv$" $(\forall z \ (z \leq y))\sigma = \forall z \ (z \leq x+y)$ z frisch, x nicht

e-mobil BW
Landesagentur für Elektromobilität und
Brennstoffzellentechnologie Baden-Württemberg GmbH

Natürliches Schließen in Prädikatenlogig

$(=I) \ \dfrac{}{E = E}$ $\qquad (=E) \ \dfrac{\varphi[E/x] \quad E = D}{\varphi[D/x]}$

$\dfrac{E = D}{D = E}$ $\qquad (=I) \ E = E \ \equiv (x = E)[E/x]$

$(=E) \ \overline{D = E} \ \equiv (x = E)[D/x]$

$\equiv (E = x)[D/x]$

$\dfrac{E = D \quad D = F}{E = F}$

1 | $E = D$
2 | $D = F$
3 | $E = F$ $\qquad \cancel{\equiv}(E = x)[F/x] \ (=E) \ 1,2$

$(\forall E) \ \dfrac{\forall x (\varphi)}{\varphi[E/x]}$ $\qquad (\forall I) \ \dfrac{\boxed{c} \ \vdots \ \varphi[c/x]}{\forall x (\varphi)}$ c Konstante, c Frisch

$(\exists I) \ \dfrac{\varphi[E/x]}{\exists x (\varphi)}$ Zeuge $\qquad (\exists E) \ \dfrac{\exists x(\varphi) \qquad \boxed{c} \ \varphi[c/x] \ \vdots \ \chi}{\chi}$

Herleitung bei $\exists x(\varphi) = \neg \forall x (\neg \varphi)$

1 | $\varphi[E/x]$
2 | | $\forall x (\neg\varphi)$
3 | | $\neg \varphi[E/x]$ $\quad (\forall E), 2$
4 | | $\bot$ $\quad (\bot I), 1, 3$
5 | $\neg \forall x (\neg \varphi)$

1 | $\neg \forall x (\neg \varphi)$
2 | | $\neg \chi$
3 | | | $\boxed{c}$
4 | | | | $\varphi[c/x]$
5 | | | | $\vdots$
6 | | | | χ
7 | | | | $\bot$ $\quad (\bot I), 2, 6$
8 | | | $\neg \varphi[c/x]$ $\quad (\neg I) \ 4-7$
9 | | $\forall x (\neg \varphi)$ $\quad (\forall I) \ 3-8$ ⚠ c frisch, da nicht in χ
10 | | $\bot$ $\quad (\bot I), 1, 9$
11 | $\neg\neg\chi$ $\quad (\neg I), 2-10$
12 | χ $\quad (\neg E), 11$

1 | $\forall x (\varphi)$
2 | φ $\quad (\forall E), 1$
3 | $\exists x (\varphi)$ $\quad (\exists I), 2$

1 | $\exists x \forall y (P(x,y))$
2 | | $\boxed{c}$ $\forall y (P(c,y))$
3 | | | $\boxed{d}$
4 | | | $P(c,d)$ $\quad (\forall E) \ ([d/y])$
5 | | | $\exists x (P(x,d))$ $\quad (\exists I) \ 4$
6 | | $\forall y \exists x (P(x,y))$ $\quad (\forall I) \ 3-5$
7 | $\forall y (\exists x (P(x,y))$ $\quad (\exists E) \ 2-6$

Unifikation

Terme E, D: ex. σ / finde σ mit $E\sigma = D\sigma$

$\underbrace{f(g(x))}_{E} \qquad \underbrace{f(y)}_{D} \qquad \sigma = [g(x)/y] \qquad \sigma' = [g(h(x,z))/y, \ h(x,z)/x]$

Def: Gleichung $E \doteq D$ - Paar von Termen E, D
Gleichungssystem = Mg. von Gleichungen
Subst. σ Unifikator von $E \doteq D$, wenn $E\sigma \overset{\text{syntaktisch}}{=} D\sigma$
σ Unifikator von Gleichungssystem S $\Leftrightarrow$ σ Unif jeder Gleichung $(E \doteq D) \in S$
$\text{Unif}(S) = \{\sigma \mid \sigma \text{ Unif. von } S\}$
S unifizierbar $\Leftrightarrow$ $\text{Unif}(S) \neq \emptyset$
σ allgemeiner als σ' $\Leftrightarrow$ ex. τ mit $\sigma\tau = \sigma'$
σ allgemeinster Unifikator von S $\Leftrightarrow$ (i) $\sigma \in \text{Unif}(S)$
(ii) $\forall \sigma' \in \text{Unif}(S)$, σ allgemeiner als σ'

www.e-mobilbw.de

Bsp: $\{a(s(x),y) \doteq a(y, s(z))\} = S$

$\sigma = [\, s(x)/y,\ x/z \,] \in \mathrm{Unif}(S)$

$\sigma' = [\, s(s(z))/y,\ s(z)/z,\ s(z)/x \,] \in \mathrm{Unif}(S)$

$\sigma' = \sigma\, [\, s(z)/x \,]$

Lemma:
1) $\sigma \in \mathrm{Unif}(S) \Rightarrow \sigma\tau \in \mathrm{Unif}(S)$
2) $\sigma = \mathrm{mgu}(S) \Rightarrow \mathrm{Unif}(S) = \{\sigma\tau \mid \tau \text{ Subst}\}$

Lemma (Eind. d. mgu) Der mgu ist eindeutig bis auch Umbenennung von Variablen.

Bew: Seien σ, σ' mgu von S. Dann ex. τ, τ' mit $\sigma' = \sigma\tau$, $\sigma = \sigma'\tau'$
$\Rightarrow \sigma = \sigma\tau\tau' \Rightarrow \tau$ Umbenennung ($\tau(v)$ ist Var. für $v \in FV(\sigma(x)), x \in FV(S)$),
τ injektiv

Unifikationsalg.

Def S gelöst, wenn jede Gleichung in S die Form $x \doteq E$ hat, wobei x in S nicht sonst vorkommt.

S_1, S_2 äquivalent $\Leftrightarrow \mathrm{Unif}(S_1) = \mathrm{Unif}(S_2)$

S' gelöste Form von S $\Leftrightarrow$ (i) S' gelöst
(ii) S', S äq.

Lemma: $S' = \{x_1 \doteq E_1, \ldots, x_n \doteq E_n\}$ gel. Form von $S \Rightarrow \mathrm{mgu}\ S = \underbrace{[E_1/x_1, \ldots, E_n/x_n]}_{:= \sigma}$

Bew: Reicht: $\mathrm{mgu}(S') = \sigma$

(i) $\sigma \in \mathrm{Unif}(S')$: $x_i\sigma = E_i = E_i\sigma$, da S' gelöst

(ii) Sei $\sigma' \in \mathrm{Unif}(S')$. Beh: $\sigma' = \sigma\sigma'$

a) $\sigma'(x_i) = E_i\sigma' = \sigma(x_i)\sigma'$

b) $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$: $\sigma'(y) = y\sigma' = \sigma(y)\sigma'$ ✓

Alg. per Umformungen

(delete) $S \cup \{x \doteq x\} \to S$

(decomp) $S \cup \{f(E_1, \ldots, E_n) \doteq f(D_1, \ldots, D_n)\} \to S \cup \{E_1 \doteq D_1, \ldots, E_n \doteq D_n\}$

(conflict) $S \cup \{f(E_1, \ldots, E_n) \doteq g(D_1, \ldots, D_k)\} \to \bot$ $\quad f \neq g$

(orient) $S \cup \{E \doteq x\} \to S \cup \{x \doteq E\}$ $\quad$ (E keine Var.)

(occurs/elim) $S \cup \{x \doteq E\} \to \begin{cases} \bot & (x \in FV(E), x \neq E) \\ S[E/x] \cup \{x \doteq E\} & (x \notin FV(E), x \in FV(S)) \end{cases}$

Bsp: $f(x, g(y)) \doteq f(g(z), z) \xrightarrow[\text{decomp}]{} \{x \doteq g(z), g(y) \doteq z\} \xrightarrow[\text{orient}]{} \{x \doteq g(z), z \doteq g(y)\}$

$\xrightarrow[\text{elim}]{} \{x \doteq g(g(y)), z \doteq g(y)\} \Rightarrow \mathrm{mgu}\ [g(g(y))/x,\ g(y)/z]$

$f(x, g(x), h(y)) \doteq f(k(y), g(z), z) \to \{x \doteq k(y), g(x) \doteq g(z), h(y) \doteq z\} \to \{x \doteq k(y), x \doteq z, h(y) \doteq z\}$

$\xrightarrow[\text{orient}]{} \{x \doteq k(y), x \doteq z, z \doteq h(y)\} \xrightarrow[\text{elim}]{2x} \{\ldots, k(y) \doteq h(y), \ldots\} \xrightarrow[\text{conflict}]{} \bot$

$f(x, g(x)) \doteq f(z, z) \xrightarrow[\text{decomp}]{} \{x \doteq z, g(x) \doteq z\} \xrightarrow[\text{elim}]{} \{x \doteq z, g(z) \doteq z\} \xrightarrow[\text{orient}]{} \{x \doteq z, z \doteq g(z)\} \xrightarrow[\text{occurs}]{} \bot$

Bei Terminierung: äquivalentes System (bei $\mathrm{Unif}(\bot) = \emptyset$), $\neq \bot \to$ gelöst

Terminierung: Terminationsmaß $(n_0 - n_1, n_2, n_3)$ in lexikalischer Ordnung

n_0 = Anzahl Var. in Eingabe
n_1 = " erledigter Var. x (x auf einer linken Seite, sonst nirgends)
n_2 = Anzahl Symbole
n_3 = Anz. Gleichungen $E \doteq x$ mit E keine Var.

9.6.14

FOL: Semantik

Neue Features: Var., Prädikate (≥ 0 stellig), Fkt, $\forall / \exists$

Def Ein Σ-Modell (Σ-Algebra, Σ-Struktur, Interpretation ...) $\mathcal{M}$ besteht aus

- eine Menge $M \neq \emptyset$ (Universum, (Grund-) Bereich, Träger)
- einer Interpretation $\mathcal{M}[\![f]\!]: M^n \to M$ für jedes $f/n \in \Sigma$
- einer Interpretation $\mathcal{M}[\![P]\!] \subseteq M^n$ für jedes $P/n \in \Sigma$

Eine Umgebung ist eine Abb. $\eta: V \to M$.

e-mobil BW
Landesagentur für Elektromobilität und Brennstoffzellentechnologie Baden-Württemberg GmbH

Bsp $\Sigma = \{z/0, s/1, O/1\}$

Σ-Modelle:

- $M_1 = \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_1[\![z]\!] = 0$, $\mathcal{M}_1[\![s]\!](n) = n+1$, $\mathcal{M}_1[\![O]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$
- $M_2 = \{0, \dots, 2n-1\}$, $\mathcal{M}_2[\![z]\!] = 0$, $\mathcal{M}_2[\![s]\!](i) = \begin{cases} i+1 & i < 2n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $\mathcal{M}_2[\![O]\!] = \{i \mid i \text{ ung...}$
- $M_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_3[\![z]\!] = (0,0)$, $\mathcal{M}_3[\![s]\!](n,k) = (n+1,k)$, $\mathcal{M}_3[\![O]\!] = \{(n,k) \mid n+k \text{ unge...}$

Def Zu Term E def. $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta \in M$ rek.:

$\mathcal{M}[\![x]\!]\eta = \eta(x)$ $\quad \mathcal{M}[\![f(E_1, \dots, E_n)]\!]\eta = \mathcal{M}[\![f]\!](\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta, \dots, \mathcal{M}[\![E_n]\!]\eta)$

$$\eta[x \mapsto m](y) = \begin{cases} m & x = y \\ \eta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

dann:

$\mathcal{M}, \eta \models \varphi$ $\quad$ ($\mathcal{M}, \eta$ erfüllt φ)

$\mathcal{M}, \eta \models E = D \iff (\mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \mathcal{M}[\![D]\!]\eta)$

$\mathcal{M}, \eta \models P(E_1, \dots, E_n) \iff (\underbrace{(\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta, \dots, \mathcal{M}[\![E_n]\!]\eta)}_{\in M^n} \in \mathcal{M}[\![P]\!])$

$\mathcal{M}, \eta \models \forall x(\varphi) \iff$ (f.a. $m \in M$ gilt $\mathcal{M}, \eta[x \mapsto m] \models \varphi$)

Bsp: $\varphi = (\neg O(z) \wedge \forall x(O(s(x)) \iff \neg O(x)))$

$\mathcal{M}_1 \models \varphi$ ✓ $\qquad \mathcal{M}_2 \models \varphi$ ✓ $\qquad \mathcal{M}_3 \models \varphi$ ✓

Lemma Sei $\eta_1(x) = \eta_2(x)$ f.a. $x \in FV(\varphi)$. Dann $\mathcal{M}, \eta_1 \models \varphi \iff \mathcal{M}, \eta_2 \models \varphi$

Bew Für Term E $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta_1 = \mathcal{M}[\![E]\!]\eta_2$, wenn $\eta_1(x) = \eta_2(x)$ f.a. $x \in FV(E)$

per Ind. über E

Dann Ind über φ, zB $\forall$: $\mathcal{M}, \eta_1 \models \forall x(\varphi) \iff$ (f.a. $m \in M$ $\mathcal{M}, \eta_1[x \mapsto m] \models \varphi$)

$\overset{IV}{\iff}$ (f.a. $m \in M$ $\mathcal{M}, \eta_2$ ") $\iff \mathcal{M}, \eta_2 \models \forall x(\varphi)$

denn: Sei $y \in FV(\varphi)$. Fall 1: $y = x$: Dann $\eta_1[x \mapsto m](y) = m = \eta_2[x \mapsto m]$

Fall 2: $y \neq x$: $\Rightarrow y \in FV(\forall x(\varphi)) \Rightarrow \eta_1(y) = \eta_2(y)$ n.V.

Lemma (Substitutionslemma): $\mathcal{M}, \eta \models \varphi[E/x] \iff \mathcal{M}, \eta[x \mapsto \mathcal{M}[\![E]\!]\eta] \models \varphi$

Bew: Terme: $\mathcal{M}[\![D[E/x]]\!]\eta = \mathcal{M}[\![D]\!]\eta[x \mapsto \mathcal{M}[\![E]\!]\eta]$ per Induktion über E, dann Ind. ü. φ $\square$

Gültigkeit, Erfüllbarkeit, log. Äquivalent, log. Folgerung wie bisher

$\Phi \models \psi :\iff (\forall \mathcal{M}, \eta\ (\mathcal{M}, \eta \models \Phi \Rightarrow \mathcal{M}, \eta \models \psi))$

Bsp: $\exists x \forall y (L(y,x)) \models \forall y \exists x (L(y,x))$

Satz (Korrektheit): $\Phi \vdash \psi \Rightarrow \Phi \models \psi$

Bew: Zeige Korrektheit aller Regeln

$\forall x(\varphi)$

$\varphi[E/x]$ $\quad (\forall E)$

Nach IV $\Phi' \models \forall x(\varphi)$

z.z.: $\Phi' \models \varphi[E/x]$, reicht $\forall x(\varphi) \models \varphi[E/x]$

Sei also $\mathcal{M}, \eta \models \forall x(\varphi)$, z.z. $\mathcal{M}, \eta \models \varphi[E/x]$

$\iff \mathcal{M}, \eta[x \mapsto \mathcal{M}[\![E]\!]\eta] \models \varphi$ gilt nach V.

Normalformen

ANF: $\neg \forall x(\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$ $\qquad \exists$ in der Grammatik

Def: Eine pränexe NF ist eine Formel der Form

$Q_1 x_1, \dots Q_n x_n(\varphi)$ $\qquad Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ $\quad n \geq 0$

φ quantorenfrei

Satz: Zu jeder Formel ex. eine äquivalente pränexe NF.

Bew: Forme exhaustiv um per $\qquad$ (o.E. schon NNF)

φ ....

Bew: $\varphi \wedge \forall x (\psi) \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$ $\quad (x \notin FV(\varphi))$

$\varphi \vee \forall x (\psi) \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$

$\varphi \wedge \exists x (\psi) \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi)$

$\varphi \vee \exists x (\psi) \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$

Jede Umformung beseitigt einen Fehlstand ($\vee/\wedge$ oberhalb $\forall/\exists$) $\rightarrow$ Terminierung

Bsp: $\forall x(\forall y(L(y,x)) \rightarrow \exists y(M(x,y)))$

$\equiv \forall x(\neg \forall y(L(y,x)) \vee \exists y(M(x,y))) \equiv \forall x(\exists y(\neg L(y,x)) \vee \exists y(M(x,y))$

$\equiv \forall x(\exists y(\exists y(\neg L(y,x)) \vee M(x,y))) \equiv \forall x(\exists y(\exists y'(\neg L(y',x) \vee M(x,y))))$

nicht frei!

Def: Eine Skolemform ist eine pränexe NF ohne $\exists$

Bsp: $\Sigma = \emptyset$: Skolemformen bis auf Äq: $\top, \bot, \forall x,y\,(x=y)$

$\rightarrow \exists x,y\,(x \neq y)$ hat keine äquivalente Skolemform

Satz: Zu jeder Formel lässt sich eine erfüllbarkeitsäq. Skolemform berechnen

Bew: Per Umformungen (von außen) von pränexen NF

$\forall x_1 \dots x_k \exists x_{k+1} (\varphi) \rightsquigarrow \forall x_1, \dots, x_k (\varphi[f_{k+1}(x_1, \dots, x_k)/x_{k+1}])\ (k \geq 0)$ $\quad f_{k+1}$ frisch

Bsp: $\rightsquigarrow \forall x(\neg L(f_3(x),x) \vee M(x, f_2(x)))$

Klauselform: bilde Skolemform $\forall x_1, \dots x_n (\underbrace{\varphi}_{\text{CNF}})$

Bsp $\{\neg L(f_3(x),x), M(x, f_2(x))\}$

FO-Resolution

Halbentscheidungsverfahren für (Gültigkeit /) Unerfüllbarkeit von Klauselformen

Recall: $\dfrac{C \cup \{A\} \quad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D}$ (Res) $\Big|$ $\dfrac{C}{C\sigma}$ σ Subst. $\quad \dfrac{C, A, A}{C, A}$ Faktorisierung

$\{A\}$ — Mengenklammern gespart — Vereinigung

$$\text{(RIF)}\ \dfrac{C, A_1, \dots, A_n \quad \neg B}{C\sigma, D\sigma} \quad \sigma = \text{mgu}(A_1, \dots, A_n, B)$$

Resolution mit impliziter Faktorisierung

Algorithmus: Ist φ gültig?

1. Bilde $\neg\varphi$
2. Bilde Klauselform
3. Wende RIF an, bis $\Box$ erreicht (dann: „ja")

Bsp: $P(a) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow \exists x(P(f(f(x))))$

$\neg$, Klauselform: $\underset{(1)}{\{P(a)\}}, \underset{(2)}{\{\neg P(x), P(f(x))\}}, \underset{(3)}{\{\neg P(f(f(x)))\}}$

(1)(2): mgu $\sigma = [a/x] \rightsquigarrow \{P(f(a))\}_{(4)}$

(4)(2): mgu: $\sigma = [f(a)/x] \rightsquigarrow \{P(f(f(a)))\}_{(5)}$

(5)(3): mgu: $\sigma = [a/x] \rightsquigarrow \Box$

Herbrand-Theorie

hier: ohne „=", o.E. $\exists c/0 \in \Sigma$

Def Herbrand-Universum $U_\Sigma = M_g$. aller Grundterme $= \{E \text{ Term} \mid FV(E) = \emptyset\}$

Für $E \in U_\Sigma$ $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta = \mathcal{M}[\![E]\!]$

Bsp: $\Sigma = \{s/1, z/0, o/1\}$ $\quad U_\Sigma = \{z, s(z), \dots\}$

Def: $\mathcal{M}$ Herbrandmodell $\Leftrightarrow$ (i) $M = U_\Sigma$

(ii) $\mathcal{M}[\![f]\!](E_1, \dots, E_n) = f(E_1, \dots, E_n)$ $\quad f/n \in \Sigma$

Auswertungslemma: $\mathcal{M}$ Herbrand $\Rightarrow$ $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta = E\eta$

Bew Ind. ü. E $\qquad$ $E \in U_\Sigma$: $\mathcal{M}[\![E]\!] = E$

Def: Grundinstanz von Formel φ: $\varphi\sigma$, σ Substitution, $\sigma(x) \in U_\Sigma$ ~~f~~ f.a. $x \in FV(\varphi)$

(dann $FV(\varphi\sigma) = \emptyset$) $\qquad$ Φ Menge von Formeln: $E(\Phi) = \{\varphi\sigma \text{ Grundinstanz} \mid \varphi \in \Phi\}$

Auswertungslemma: $\mathcal{M}$ Herbrand $\Rightarrow$ $\mathcal{M}, \eta \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \underbrace{\varphi\eta}_{\text{Grundinstanz}}$

Bew: $\mathcal{M} \models \varphi\eta \Leftrightarrow \mathcal{M}, \eta' \models \varphi$ mit $\eta'(x) = \mathcal{M}[\![\eta(x)]\!] = \eta(x)$

Def φ Formel, $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\Rightarrow$ universeller Abschluss

$\forall\Phi = \{\forall\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$ $\qquad$ $\forall\varphi = \forall x_1 \dots x_n(\varphi)$

Grundinstanzlemma $\mathcal{M}$ Herbrand $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \models \forall\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi\sigma$ f.a. Grundinstanzen $\varphi\sigma$

Satz (Herbrandvollständigkeit): Sei Φ Menge von quantorenfreien Formeln. Äq. sind

(1) $\forall\Phi$ erfüllbar

(2) Es gibt $\mathcal{M}$ Herbrand mit $\mathcal{M} \models \forall\Phi$

(3) $E(\Phi)$ ist aussagenlogisch erfüllbar

„aussagenlog. erfüllbar": Lese FOL-Formel als aussagenlog. Formeln:

$\underbrace{\forall x(\varphi)}_{A} \wedge \underbrace{\exists x(\neg\varphi)}_{B}$ nicht erfüllt, aber aussagenlog. erfüllbar

$\underbrace{\forall x(\varphi)}_{A} \wedge \underbrace{\neg \forall x(\varphi)}_{\neg A}$ aussagenlog. nicht erfüllbar.

$(2) \Rightarrow (1)$, $(1) \Rightarrow (3)$ trivial

↖ Grundinstanzen-Lemma

$(3) \Rightarrow (2)$: Sei $k \models E(\Phi)$. Konstruiere $\mathcal{M}$ per $\mathcal{M}[\![P]\!] = \{(E_1, \dots, E_n) \mid k(P(E_1, \dots, E_n)) = \top\}$ $P/n \in \Sigma$

Zeige: Für Grundinstanzen $\varphi\sigma$ $\qquad$ $\mathcal{M} \models_{\text{FOL}} \varphi\sigma \Leftrightarrow k \models \varphi\sigma$

Bew Ind. ü. φ, Boolesche Fälle trivial, $P(E_1, \dots, E_n)$:

$\mathcal{M} \models P(E_1, \dots, E_n) \Leftrightarrow (\underbrace{\mathcal{M}[\![E_1]\!]}_{E_1}, \dots, \mathcal{M}[\![E_n]\!]) \in \mathcal{M}[\![P]\!] \Leftrightarrow (E_1, \dots, E_n) \in \mathcal{M}[\![P]\!] \Leftrightarrow k(P(E_1, \dots, E_n)) = \top$

$\mathcal{M} \models \forall x(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi\sigma$ f.a. Grundinstanzen $\varphi\sigma$ $\Leftrightarrow k \models \varphi\sigma$ f.a. ... LÜCKE

Korollar: ~~Löwenheim~~ Löwenheim/Skolem Σ abz., Φ erfüllbar $\Rightarrow$ Φ hat abz. Modell

Korollar: FOL ist kompakt

Korollar: Gültigkeit in FOL ist halbentscheidbar

Resolution:

(RIF) $\dfrac{C, \neg A \qquad B_1, \dots, B_n, D}{C\sigma, D\sigma}$ $\quad \sigma = \text{mgu}(A, B_1, \dots, B_n)$

(LRIF) $\qquad$ " $\qquad$ $\sigma \in \text{Unif}(\dots)$

(RIZF) $\dfrac{C, \neg A_1, \dots, \neg A_m \qquad B_1, \dots, B_n, D}{C\sigma, D\sigma}$ $\quad \sigma = \text{mgu}(A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n)$

Lemma: $\square$ aus Φ per (LRIF) herleitbar $\Rightarrow$ auch per (RIF)

Lemma: (RIZF) aus (LRIF) herleitbar

Lifting: $\sigma \in \text{Unif}(A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n)$, Grundsubst.

$\Rightarrow$ $\underbrace{C\sigma, D\sigma}_{\text{Resolvente (aussagenlog.)}}$ ist Grundinstanz von Resolvente von $C, \neg A_1, \dots, \neg A_m$ $\; B_1, \dots, B_m, D$ nach (RIZF)

Satz (Vollst. der Res) Φ unerfüllbar => $\square$ herleitbar aus Φ per (RIF)
↑ Klauselmenge

Bew Herbrand: $E(\Phi)$ aussagenlog. unerfüllbar => $\square$ herleitbar per (Res)
=> (Lifting) $\square$ aus Φ herleitbar, per (R12F) => auch per (LRIF) => auch per (RIF

Recall: U_Σ = Menge der geschlossenen Σ-Terme

Grundinstanzlemma $\mathfrak{M}$ Herbrand, φ Formel -> $\mathfrak{M} \models \forall\varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi_\sigma$

Satz: Sei Φ Menge von quantorenfreien Formeln
Äquivalent sind (1) $\forall\Phi$ erfüllbar
(2) Es gibt $\mathfrak{M}$ Herbrand mit $\mathfrak{M} \models \forall\Phi$
(3) $E(\Phi)$ aussagenlogisch erfüllbar

Folgerungen: Satz (Löwenheim/Skolem): Σ abzählbar => jede erfüllbare Formelmenge hat abzählbares Modell
Kompaktheit: Jede endlich erfüllbare Formelmenge

Vollständigkeit

Satz: $\Phi \models \psi \Rightarrow \Phi \vdash \psi$
(Semantik (log. Folgerung) ; Beweistheorie (Herleitbarkeit))

Bew nach Henkin: Vereinfachungen: – kein $=$, nur 0-stellige Fkt, Φ, ψ nur Sätze
Strategie:
A) Henkin-Theorie $\Sigma_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}$, $\Sigma \subseteq \Sigma_{\mathcal{H}}$ sodass zu $\varphi(x)$ über $\Sigma_{\mathcal{H}}$ Henkin-Konstante $c_{\varphi(x)}$ mit $\exists x(\varphi(x)) \to \varphi(c_{\varphi(x)}) \in \mathcal{H}$
B) Henkin-Elimination ϱ Σ-Formel -> $(\Phi \cup \mathcal{H} \vdash \varrho \Rightarrow \Phi \vdash \varrho)$
C) Henkin-Konstruktion Aus $K \models_{\text{Aussagenlogik}} \Phi \cup \mathcal{H}$ konstruiere $\mathfrak{M}_K \models_{\text{FOL}} \Phi$

Damit Bew:
Reduziere auf Φ konsistent => Φ erfüllbar
Sei Φ konsistent $\overset{B)}{\Rightarrow}$ $\Phi \cup \mathcal{H}$ konsistent (in FOL) => $\Phi \cup \mathcal{H}$ aussagenlogisch konsistent
=> (Vollständigkeit der Aussagenlogik) " " erfüllbar
$\overset{C)}{\Rightarrow}$ Φ erfüllbar (in FOL) □.

A) Füge $c_{\varphi(x)}$ hinzu: $\Sigma_{\mathcal{H}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma_i$, $\Sigma_0 = \Sigma$, $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{c_{\varphi(x)} \mid \varphi(x)\ \Sigma_i\text{-Formel}\}$
Geburtstag v. $c_{\varphi(x)}$ = $\min\{i \mid c_{\varphi(x)} \in \Sigma_i\}$
$\mathcal{H}$: H1: $\exists x(\varphi(x)) \to \varphi(c_{\varphi(x)})$ ($\varphi(x)$ $\Sigma_{\mathcal{H}}$-Formel)
H2: $\varphi(c) \to \exists x(\varphi(x))$ ($c/o \in \Sigma_{\mathcal{H}}$)

B) $\mathcal{H}$ herleitbar in FOL, also eliminierbar. Sei $\Phi \cup \mathcal{H} \vdash \varrho$. Sei $\exists x(\varphi(x)) \to \varphi(c_{\varphi(x)})$ Instanz v. H1 im Bew. mit jüngstem $c_{\varphi(x)}$, $\mathcal{H}_0$ die anderen
dh $\Phi \cup \mathcal{H}_0 \cup \{\exists x(\varphi(x)) \to \varphi(c_{\varphi(x)})\} \vdash \varrho \Rightarrow \Phi \cup \mathcal{H}_0 \cup \{\neg\exists x(\varphi(x))\} \vdash \varrho$ und
$\Phi \cup \mathcal{H}_0 \cup \{\varphi(c_{\varphi(x)})\} \vdash \varrho$
($c(\varphi_0)$ kommt nicht vor)

$\Rightarrow \Phi \cup \mathcal{H}_0 \cup \{\exists x(\varphi(x))\} \vdash \varrho \Rightarrow \Phi \cup \mathcal{H}_0 \vdash \varrho$ induktiv weiter, fertig!

C) Sei $K \models \Phi \cup \mathcal{H}$. Setze M_K = Konstanten in $\Sigma_{\mathcal{H}}$, $\mathfrak{M}_K[\![c]\!] = c$, $\mathfrak{M}_K[\![P]\!] = \{(c_1,\dots,c_n) \mid K(P(c_1 \dots c_n)) = T\}$ $P/n \in \Sigma$

Wahrheitslemma: ϱ $\Sigma_{\mathcal{H}}$-Satz $\Rightarrow (\mathfrak{M}_K \models_{\text{FOL}} \varrho \iff K \models_{\text{Aussagenlogik}} \varrho)$

Bew Induktion über Größe von ϱ. o.E. kein $\forall$ in ϱ ($\forall = \neg\exists\neg$, herleitbar)
Fall $P(c_1,\dots,c_n)$: nach Konstruktion. $\wedge, \neg$ trivial.
$\exists x(\varphi(x))$: "=>": Sei $\mathfrak{M}_K \models \exists x(\varphi(x)) \overset{\text{Substitutionslemma}}{\Rightarrow}$ es ex. $c \in M_K$ mit $\mathfrak{M}_K \models \varphi(c) \overset{\text{IV}}{\Rightarrow}$
$K \models \varphi(c) \overset{\text{H2}}{\Rightarrow} K \models \exists x(\varphi(x))$
"<=" Sei $K \models \exists x(\varphi(x)) \overset{\text{H1}}{\Rightarrow} K \models \varphi(c_{\varphi(x)}) \overset{\text{IV}}{\Rightarrow} \mathfrak{M}_K \models \varphi(c_{\varphi(x)}) \Rightarrow \mathfrak{M}_K \models \exists x(\varphi(x))$

=> Kompaktheit