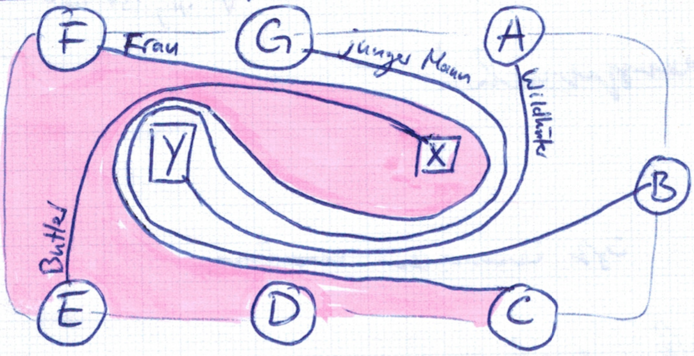
Eva Dengler, na79zegy
Dominik Huber, yf32otep
↳ Kristin Braun
Lorenz Kästle, um77owun
↳ Merlin Göttlinger

Datum
Name/Projekt

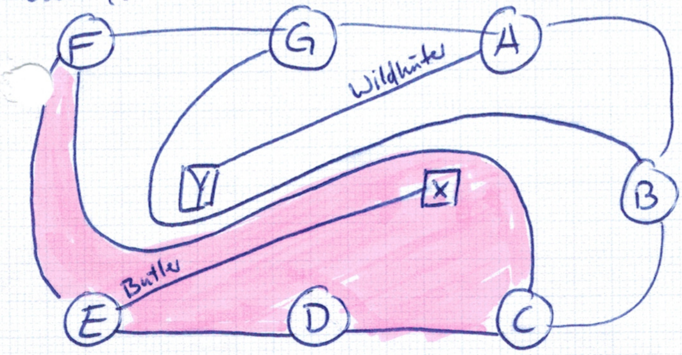
(at least I tried!)

methodpark

5. Mord im Schlosspark



oder (etwas übersichtlicher)



Im nebenstehenden Diagramm die sich nicht überschneidenden Wege.

Unsere Leiche kann lebendig nur im PINKEN Bereich umhergewandert sein. Dabei kann sie nur am Butler und an der Frau vorbeigekommen sein. Da nach Aufgabenstellung der Butler zum Zeitpunkt des Mordes im Haus X war, muss die Frau der Mörder sein.

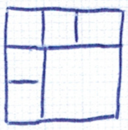
Titten :D

warum gibt es keine anderen Möglichkeiten?
(A → Y entweder über oder unter X vorbei, Rest dadurch bestimmt)

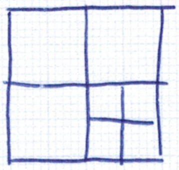
4/5P.

8. Quadratur des Quadrates

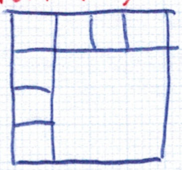
IA: i = 6:



i = 7



i = 8



IV: Zerlegung für $n \geq 6$ gefunden

IS: $n \to n+3$.

man nehme ein beliebiges Quadrat □. Durch 2 Striche teilt man das Quadrat in 4 Quadrate: □ → ⊞. Dadurch wird aus einem Quadrat 1+3 Quadrate. Also: $1 \to 1+3=4$. Das heißt, dass man 3 Quadrate mehr als davor hat. => $n \to n+3$ □. ✓

5/5

A5	A6	A7	A8	Σ
4	5	5	5	19

1.6. Widerlegung der Riemannschen Vermutung

Ein E hat einmal Teilgenommen.

E Elefant
R Rüssel
T Turnierteilnahme
G Mastermind gewonnen
$\bar{V}$ vergisst nie

und E vergisst nie ($\bar{V}$)

Also $T \wedge \bar{V}$ ist wahr.

$E \wedge T \wedge \bar{V} \Rightarrow G \Rightarrow \bar{R} \Rightarrow \bar{E}$ Widerspruch!

falsch $\Rightarrow$ beliebige Aussage ist immer wahr.

Also ist die Schlussfolgerung korrekt. □

Aussagen

$E \to \bar{V}$

$G \to \neg R$ oder $G \to \bar{R}$

$\bar{V} \wedge T \to G$

$\neg R \to \neg E$ oder $\bar{R} \to \bar{E}$

Negation immer so schreiben!

/5P.

7. IA: $n=1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \approx 0{,}81$

IV: $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$ ✓

IS: $n \to n+1$

z.z.: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$

Induktionsvoraussetzung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{n+1} = \frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})(n^2+3n+\frac{9}{4})}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n^3+\frac{7}{2}n^2+\frac{15}{4}n+\frac{9}{8}}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} < \frac{\sqrt{n^3+\frac{7}{2}n^2+\frac{15}{4}n+\frac{3}{2}}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{(n+\frac{3}{2})\cdot(n^2+2n+1)}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} = \frac{(n+1)\sqrt{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+\frac{3}{2}}}{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)+\frac{1}{2}}}$$ ✓

stärkere Aussage $\Rightarrow$ schwächere Aussage.

Sei $x := \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$

Aus $x < \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left(\text{da } \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$x < \frac{1}{\sqrt{n}}$

Also ist das eine stärkere Aussage.

5/5

Datum
Name/Projekt
Eva Dengler, na79zegy
Lorenz Kästle, um77owun
Dominik Huber, yf32otep

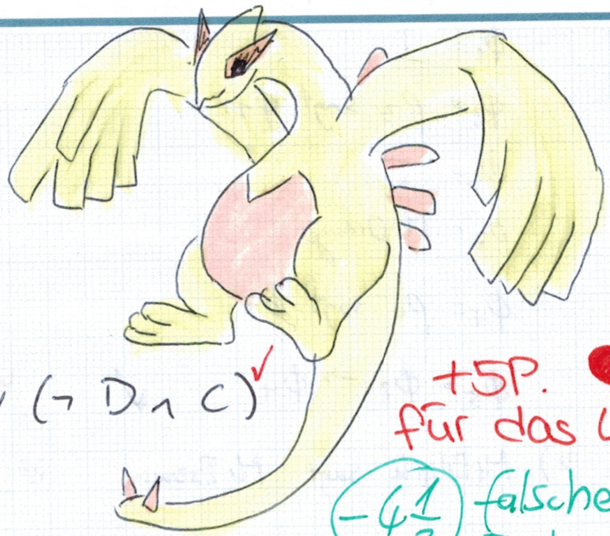
A3	A4	A5	Σ
4,5	3	6	13,5

~~(+5)~~ (+0,5)

methodpark

A3

U : unzerstörbar
S : schweben
L : Land vor unserer Zeit
SM : superMan
C : Cheopspyramide
D : Dalai Lama
Q : Queen



(a.1) $L \wedge \neg Q \rightarrow (D \wedge \neg C) \vee (\neg D \wedge C)$ ✓

(a.2) $D \rightarrow (\neg SM \wedge \neg U)$ ✓

(a.3) $S \wedge U <=> SM \vee Q$ ✓

schreibt ↔

/3P.

+5P. für das Lugi

−4 1/2 falsche Farbe!

b) und c):

U	S	L	SM	C	D	Q	$L \wedge \neg Q$	$(D \wedge \neg C)$	$(\neg D \wedge C)$	~~rechte Seite~~ (a.1)	(a.1)	$S \wedge U$	$SM \vee Q$	(a.3)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1

U	S	L	SM	C	D	Q	$\neg SM \wedge \neg U$	(a.3)
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1

warum?! ö

zu b) (a.1) ~~alle sind erfüllbar~~ $K(U) = \perp$, $K(S) = \perp$, $K(L) = \perp$

(a.2) $K(U) = \perp$, $K(S) = \perp$, $K(L) = \perp$

(a.3) $K(U) = \perp$, $K(S) = \perp$, $K(L) = \perp$

Der Punkt soll jeweils im Diagramm liegen.

/0,5/1 P.

zu c) (a.1) $K(U) = \perp$, $K(S) = \perp$, $K(L) = T$ ✓

(a.2) und (a.3): sind immer erfüllt, siehe Wahrheitstafel.
=> existiert nicht ✓

/1P.

4,5/5

$\boxed{A4}$ a) $\rho_1 =$ Mr Black

$\rho_2 =$ Mr Orange

$\rho_3 = \rho_1$ und ρ_2

$\phi_1 = \bot$

$\phi_2 = \rho_3$ sagt ϕ_1

$\phi_3 = \top$

$\rho_4 =$ Mr Orange

$\phi_4 = \rho_4$ sagt ϕ_3

$\phi_5 = \phi_2 \rightarrow \phi_4$ ✓ ✓

b) Mr Black sagt Mr Brown ist nicht in der zweiten Grammatik

ρ sagt φ

~~ρ~~ $\rho_1 =$ Mr Black passt, jedoch $\varphi_1 =$ Mr Brown nicht, da Mr Brown nur in der ersten Grammatik ist ↯

✓

c) $\rho_1 =$ Mr Black

$\phi_1 = \bot$

$\phi_2 = \rho_1$ sagt $\bot$

$\phi_3 = \top$

$\phi_4 = \phi_3 \wedge \phi_2$

$\rho_2 =$ Mr Brown

$\phi_5 = \rho_2$ sagt ϕ_4 ✓ ✓

3P.

5. a)

A	$\neg A$	X	Schaltung 1	Schaltung 2
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1

✓

$X = 0$: Ausgang von X leitet keinen Strom

1P.

d)

$$(\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge B)) \wedge \neg A$$

Falls $A = 1 \Rightarrow \neg A = 0 \Rightarrow$ Schaltung $= 0$

Falls $A = 0 \Rightarrow \neg A = 1$:

$$\Rightarrow (T \vee (\bot \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \wedge B)) \wedge T =$$

$$= (T) \wedge ((\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee B)) =$$

$$= \neg B \vee \neg C$$

ihr sollt nicht vereinfachen, sondern eine NF wie in (c) beschrieben angeben.

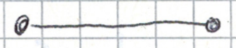
$$\Rightarrow \neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)$$

aber das ist außerdem keine NF

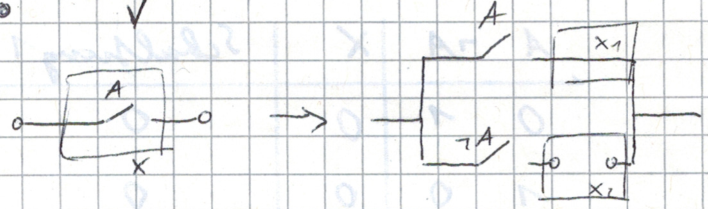
0/3

6/12 P.

5 c) IA: Schaltkreis mit $n=0$ Schaltern ist in Normalform

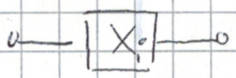


✓

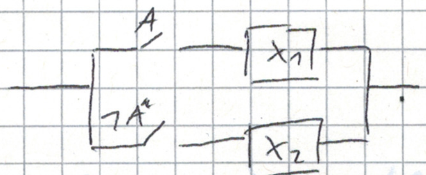
(für $n=1$: )

IV: $\exists\, x_i$ mit n Schaltern und ist in Normalform

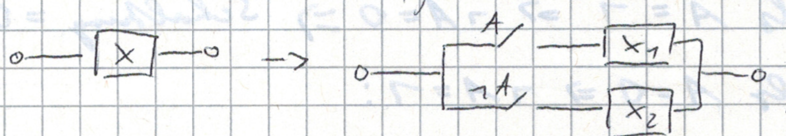
also:

 in Normalform

IS: wir können also $\boxed{x_i}$ nach Teilaufgabe b)

zu  umwandeln

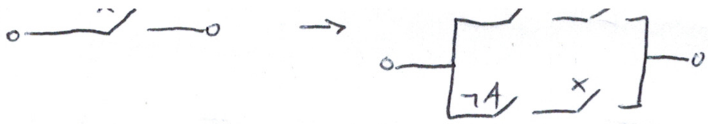
IS: Sei X und habe X $n+1$ Schalter. Dann lässt sich X nach Teilaufgabe b umformen zu

,

wobei x_1 und x_2 das Atom A nicht mehr enthalten (nach Teilaufgabe b), also 1 Schalter weniger haben als X, nämlich n Schalter. Nach IV lassen sich diese Schaltungen ~~[illegible]~~ in Normalform bringen. □

✓

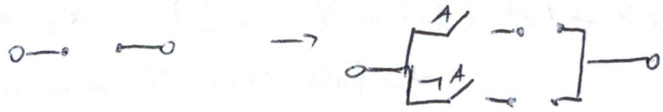
3/3

5b) IA: 1. 

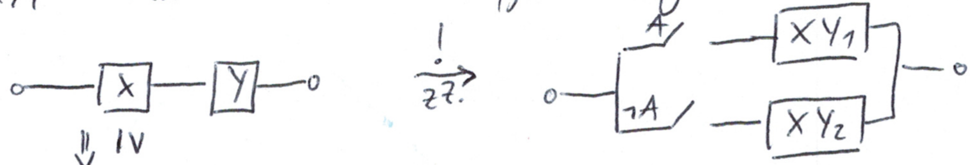
Fallunterscheidung $X \overset{?}{=} A$

5,b)

2. 

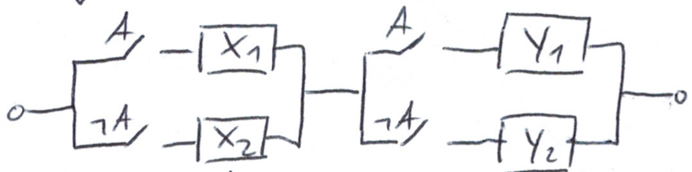
3. 

IV: $\exists$ X, Y umwandelbar nach Aufgabenstellung ✓

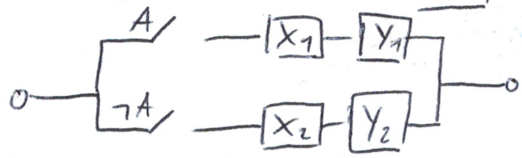
IS: 1. 

(*1)

$\Downarrow$ IV

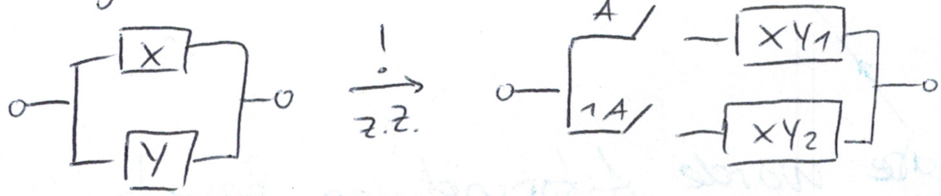


siehe Rückseite

=> 

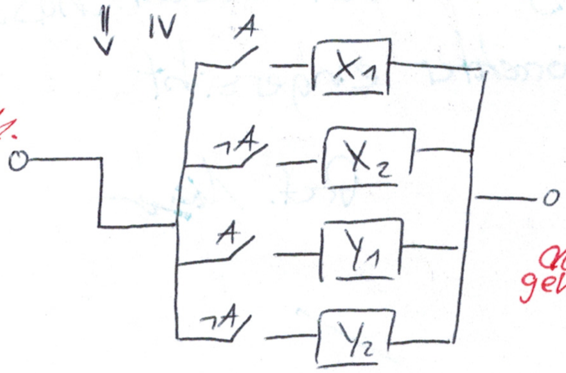
=> mit $-\boxed{XY_1}- \hat{=} -\boxed{X_1}-\boxed{Y_1}-$ und $-\boxed{XY_2}- \hat{=} -\boxed{X_2}-\boxed{Y_2}-$

folgt (*1)

2. 

(*2)

$\Downarrow$ IV



$A \wedge (A \vee X_1)$
$\Leftrightarrow A \; (\neq)$

$(A \wedge X_1) \vee (A \wedge Y_1)$

$\Leftrightarrow (A \vee A) \wedge (A \vee X_1) \wedge (A \vee Y_1) \wedge (X_1 \vee Y_1)$

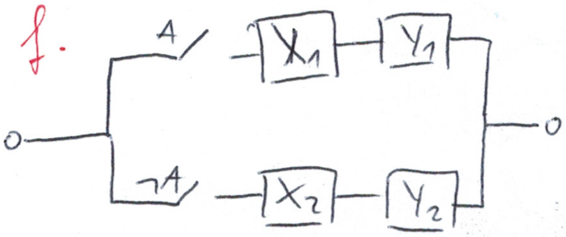
$\Leftrightarrow A \wedge (A \vee X_1) \wedge (A \vee Y_1) \wedge (X_1 \vee Y_1)$

$\Leftrightarrow A \wedge X_1 \wedge Y_1 \wedge (X_1 \vee Y_1)$

das geht nicht

$\Leftrightarrow A \wedge X_1 \wedge Y_1$ (ebenso mit $\neg A, X_2, \ldots$

A	X_1	Y_1	$(A \wedge X_1) \vee (A \wedge Y_1)$	$A \wedge X_1 \ldots$
1	1	0	1	0

f. 

=> mit $-\boxed{XY_1}- \hat{=} -\boxed{X_1}-\boxed{Y_1}-$ und $-\boxed{XY_2}- \hat{=} -\boxed{X_2}-\boxed{Y_2}-$

folgt (*2)

2/5

$\square$.

zu Folgerung letzte Seite:

Falls $K(A) = \perp$: $(\perp \vee (\top \wedge X_2)) \wedge (\perp \vee (\top \wedge Y_2)) = X_2 \wedge Y_2$

$\Rightarrow$ Falls $K(A) = \perp$ dann ist $X{\cdot}Y_2 = X_2 \wedge Y_2$

Falls $K(A) = \top$: $((\top \wedge X_1) \vee \perp) \wedge ((\top \wedge Y_1) \vee \perp) = X_1 \wedge Y_1$

$\Rightarrow$ Falls $K(A) = \top$ dann ist $XY_1 = X_1 \wedge Y_1$.

Diese Abgabe wurde aufgrund von Bestechungsversuchen zur Zweitkorrektur eingereicht

Prof. Meyer

Datum
Name/Projekt
Eva Dengler, na+1zegy
Dominik Huber, yf32otep
Lorenz Kästle, um77owun

A3	A4	A5	Σ
4	4	6,5	14,5

methodpark

3a $\phi, \psi ::= A \in \mathcal{A} \mid \phi \vee \psi \mid \phi \to \psi$

IA: $\phi = A$, $K(A) = T \iff K \models \phi$ ✓✓
IV: $\exists \phi_{1,2}$: $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$ ✓
IS: $\phi_{1,2}$ erfüllen Bedingung, also $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$

$K \models \phi_1 \to \phi_2 \iff$ falls $K \models \phi_1$, dann $K \models \phi_2$ ✓
↳ für $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$ wahr ✓

$K \models \phi_1 \vee \phi_2 \iff K \models \phi_1$ oder $K \models \phi_2$ ✓
↳ für $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$ wahr ✓

/3P.

3b IA: $A, B \in \mathcal{A}$ $\phi_1 = A \vee B$: $K(A) = \bot$, $K(B) = T \Rightarrow K \models \phi_1$ ✓✓
$\phi_2 = A \to B$: $K(A) = \bot$, $K(B) = T \Rightarrow K \models \phi_2$ ✓✓

eigentlich habt ihr keinen IA, da bei $\phi = A$ die Prämisse nicht gilt ⇒ wahre Aussage

IV: ϕ_1, ϕ_2 mit $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$ und ϕ_1 und ϕ_2 sind mind. aus 2 Atomen, wobei mind. ein vorkommendes Atom auf $\bot$ abbildet.

IS: 1. $K \models \phi_1 \vee \phi_2 \iff K \models \phi_1$ oder $K \models \phi_2$ → für $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$ wahr ✓
Es kann aber sein, dass zB. $\phi_1 = A$, $\phi_2 = B \vee B$ → IV nicht anwendbar
2. $K \models \phi_1 \to \phi_2 \iff$ falls $K \models \phi_1$, dann $K \models \phi_2$ → für $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$ wahr ✓

/1/3P. /4/6P.

5a IA: $\phi = A$ 2 Fälle: $K(A) = \bot \to K \not\models \phi$ ✓ (wenn ϕ erfüllt, dann …)
$K(A) = T \to K \models \phi$ ✓
↳ Stromkreis: A

$\forall \phi = \bot$ (-1P.)

IV: Aussage gilt für ϕ_1, ϕ_2, also $K \models \phi_1$, $K \models \phi_2$

IS: Zitat A1: „$\phi \wedge \psi$", $\phi_3 = \phi_1 \wedge \phi_2$

$K \models \phi_1 \wedge \phi_2 \iff K \models \phi_1, K \models \phi_2$ ← IV, also korrekt

wie sieht der zug. Schaltkreis aus? (-1P.)

Zitat A2: „$\neg \phi$"
$K \models \phi_1 \iff K \not\models \neg\phi_1$ → linke Seite der Aussage falsch → Aussage korrekt.
ihr sollt eine Äquivalenz zeigen (-1P.)

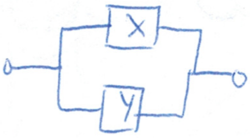
/1/4P.

5b IA: in NNF darstellbar durch $A \vee \neg A$ ✓
kein Stromfluss $\iff$ keine Formel ✓ ?! Doch.. $A \wedge \neg A$ (-0,5P.)
A in NNF A
↳ $K(A) = T \iff$ Stromfluss → $\exists$ erfüllte Formel gdw Stromfluss ✓
↳ $K(A) = \bot \iff$ kein Stromfluss → nicht erfüllte Formel $\iff$ kein Strom ✓

IV: $\exists X, Y$ erfüllen Bedingung ✓

1. 

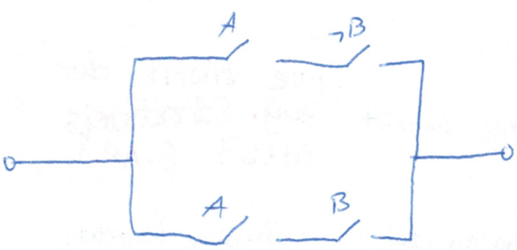
1. X leitet keinen Strom $\leftrightarrow$ keine erfüllte Formel ϕ in NNF für X ($K \not\models X$)
$\leftrightarrow$ keine erfüllte Formel für $X \wedge Y$ $\leftrightarrow$ keine Stromleitung von $X \wedge Y$, da $K \models X \wedge Y \Leftrightarrow K \models X, K \models Y$, aber $K \not\models X$ ↯
2. Y leitet keinen Strom $\leftrightarrow$ keine erfüllte Formel ϕ in NNF für ~~X~~ Y ($K \not\models Y$)
$\leftrightarrow$ keine erfüllte Formel für $X \wedge Y$ $\leftrightarrow$ ~~X~~ $X \wedge Y$ leitet keinen Strom, da $K \models X \wedge Y \Leftrightarrow K \models X, K \models Y$, aber $K \not\models Y$ ↯
3. X und Y leiten Strom $\leftrightarrow$ X und Y haben erfüllte Formel ϕ in NNF
$\rightarrow$ Formel: $X \wedge Y$, da, wenn $K \models X$ und $K \models Y \Leftrightarrow K \models X \wedge Y$ ✓ ✓

2. 

1. X und Y leiten keinen Strom $\leftrightarrow$ keine erfüllte Formel ϕ in NNF
$\leftrightarrow$ kein Stromfluss von $X \vee Y$ $\leftrightarrow$ keine erfüllte Formel $X \vee Y$
$K \models X \vee Y \Leftrightarrow K \models X$ oder $K \models Y$, weder $K \models X$ noch $K \models Y$ ↯
2. $K \models X \vee Y \Leftrightarrow K \models X$ oder $K \models Y$ (*)
X leitet Strom $\leftrightarrow$ X hat erfüllte Formel $\rightarrow$ (*) erfüllt!
Y leitet Strom $\leftrightarrow$ Y hat erfüllte Formel $\rightarrow$ (*) erfüllt! ✓

3,5/4 P.

$\boxed{5c}$ $((A \rightarrow B) \vee B) \rightarrow (A \wedge B) = ((\neg A \vee B) \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$
$= \neg((\neg A \vee B) \vee B)) \vee (A \wedge B) = \neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge B)$ ✓
$= \neg(\neg(\neg\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B) = (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ ← in NNF!



2 P.

6,5/10

Kodierung:

- E: ist Elefant
- Mg: Mastermind gewinnen
- KR: Kein Rüssel
- Nv: Nichts vergessen
- MmT: Mastermind-Teilnahme

Aussagen:

- $E \to Nv$
- $Mg \to KR$
- $Nv \land MmT \to Mg$
- $KR \to \neg E$
- $E \land MmT$

Zu b): Es gibt keine Wahrheitsbelegung der Atome, die alle Annahmen erfüllt.

Elefant	Mg	KR	Nv	Mmt	(E$\rightarrow$ Nv)	(Mg$\rightarrow$ KR)	(Nv $\wedge$ MmT $\rightarrow$ Mg)	(KR$\rightarrow$ $\neg$E)	(E$\wedge$MmT)	gueltig
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$

Das nächste mal größer :D

/4P.

Aufgabe 5 c)

Abgabe von:

Eva Deugler, na79zegy
Lorenz Kästle, um77owun
Dominik Huber, yf32otep

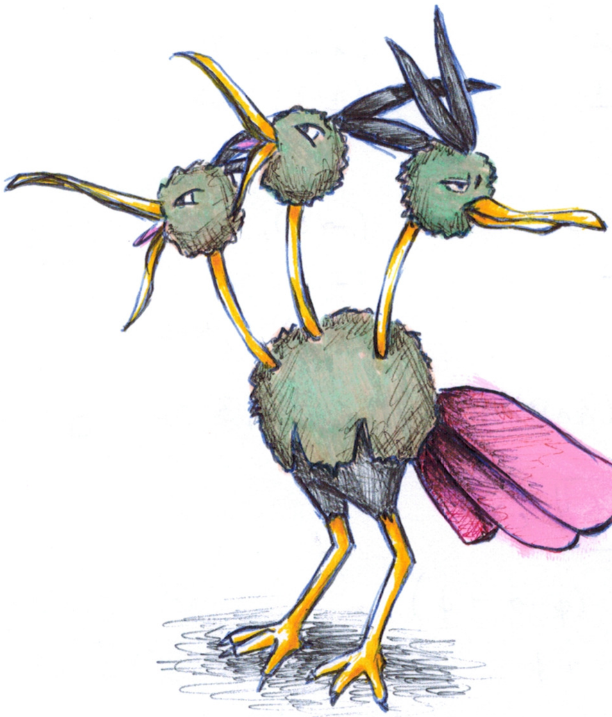
1	C	
2	$A \wedge \neg((B \vee C) \to A)$	
3	A	
4	$B \vee C$	$(\vee I_2)$, 1
5	$B \vee C$	
6	A	
7	$(B \vee C) \to A$	$(\to I)$, 5,6
8	$\neg((B \vee C) \to A)$	$(\wedge E_2)$, 2
9	$\bot$	$(\bot I)$ 7,8
10	$\neg A$	$(\neg I)$, 3-9
11	$\neg A$	
12	A	$(\wedge E_1)$,2
13	$\bot$	$(\bot I)$, 11,12
14	$\neg\neg A$	$(\neg I)$, 11-13
15	A	$(\neg E)$, 14
16	$\bot$	$(\bot I)$, 10,15
17	$\neg(A \wedge \neg((B \vee C) \to A)$	$(\neg I)$, 2-16
18	A	
19	$\neg((B \vee C) \to A)$	
20	$A \wedge \neg((B \vee C) \to A)$	$(\wedge I)$ 18,19
21	$\bot$	$(\bot I)$ 17,20
22	$\neg\neg((B \vee C) \to A)$	$(\neg I)$ 19-21
23	$((B \vee C) \to A)$	$(\neg E)$ 22
24	$\neg A \vee ((B \vee C) \to A)$	$(\vee I_2)$ 23
25	$\neg A$	
26	$\neg A \vee ((B \vee C) \to A)$	$(\vee I_1)$ 25
27	$\neg(A \vee \neg A)$	
28	A	
29	$A \vee \neg A$	$(\vee I_1)$ 28
30	$\bot$	$(\bot I)$, 27,29
31	$\neg A$	$(\neg I)$, 28-30
32	$A \vee \neg A$	$(\vee I_2)$, 31
33	$\bot$	$(\bot I)$, 27,32
34	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	$(\neg I)$, 27-33
35	$A \vee \neg A$	$(\neg E)$, 34
36	$\neg A \vee ((B \vee C) \to A)$ ✓	$(\vee E)$, 35, 18-24, 25-26 □.

geht in einer Zeile: A $(\wedge E_1)$,2

hättest du auch mit (FU) machen können

2/2 P.

6/6 P.



Punkte:

A3	A4	A5	A6	ges.
5	2	6	6	19

Domi ist Schuld!

A3: Seite 3	A4: Seite 5	A5 a) Seite 2	A6 a) Seite 6
		A5 b) Seite 4	A6 b) Seite 2
		A5 c) Seite 1	A6 c) Seite 2

Aufgabe 5 a)

	$A \wedge B$	
	$\neg A \vee C$	
	$(A \wedge B) \to \neg C$	
	$\neg A$	
	A	$(\wedge E_1)$, 1
	$\bot$	$(\bot I)$, 4,5
	C	
	$\neg C$	$(\to E)$, 1, 3
	$\bot$	$(\bot I)$, 7,8
10	$\bot$	$(\vee E)$, 2, 4-6, 7-8
11	$\neg((A \wedge B) \to \neg C)$	$(\neg I)$, 3-10 □.

2P.

Aufgabe 6 c)

1	$\phi \wedge (\phi \to \neg \phi)$	
2	$\phi \to \neg \phi$	$(\wedge E_2)$, 1
3	ϕ	$(\wedge E_1)$, 1
4	$\neg \phi$	$(\to E)$, 2, 3
5	$\bot$	$(\bot I)$ 3,4
6	$\phi \wedge (\phi \to \neg \phi)$	$(\bot E)$, 5

□. /2P.

6/6P.

Aufgabe 6 b)

ϕ	ψ	ξ	$\phi \vee \psi$	$\phi \to \xi$	$\neg \xi \to \neg \psi$	1	2
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

=> aus 1 folgt 2

1

1	$(\phi \vee \psi) \to \xi$	
2	ϕ	
3	$\phi \vee \psi$	$(\vee I_1)$, 2
4	ξ	$(\to E)$, 1, 3
5	$\phi \to \xi$	$(\to I)$, 2-4
6	$(\phi \to \xi) \vee (\neg \xi \to \neg \psi)$	$(\vee I_1)$, 5

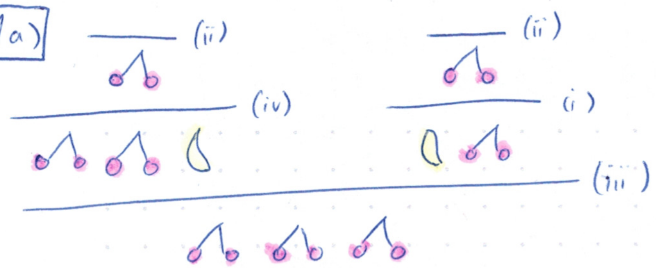
□.

2|2P.

Eva Dengler, na79zegy
Lorenz Kästle, um77owun
Dominik Huber, yf32otep

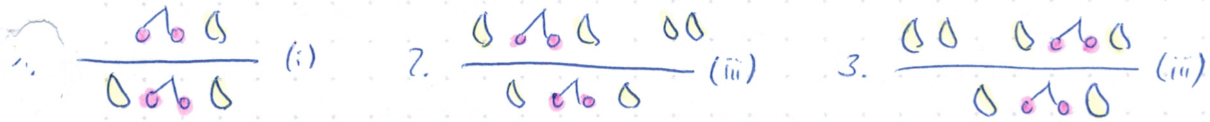
Aufgabe 3

1a)



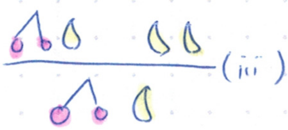
1b) Es existiert keine Herleitung, da man immer zuerst eine [Kirsche] erstellen muss (als „Basis") mithilfe von (ii), alle anderen Regeln setzen ein nicht leeres X oder Y voraus. Somit kann man auch nie eine Kirsche entfernen durch die obigen Regeln, da dort X und Y stets übertragen werden (komplett).

1c) um [Symbole] zu bauen, gibt es aus den obigen Regeln folgend genau 3 Möglichkeiten:



2 & 3. kann man nur aus sich selbst bauen → rekursiv ohne Basisfall! ⇒ funkt. nicht

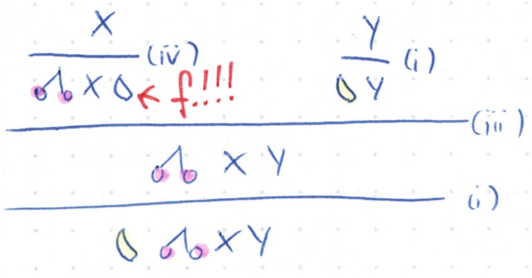
zu 1.



Das besteht auch wieder aus sich selbst → geht auch kaputt → 1c) ist nicht im Kirsch-Baumen-Kalkül herleitbar.

2a)

2b)



5P.

Aufgabe 5

b)

1	$\neg(\neg(A \to B) \land \neg B)$	
2	$\neg C \to A$	
3	$\neg(C \lor B)$	
4	$\neg B$	
5	$A \to B$	
6	$\neg A$	
7	C	
8	$C \lor B$	$(\lor I_1)$, 7
9	$\bot$	$(\bot I)$, 3, 8
10	$\neg C$	$(\neg I)$, 7 - 9
11	A	$(\to E)$, 2, 10
12	$\bot$	$(\bot I)$, 6, 11
13	$\neg\neg A$	$(\neg I)$, 6 - 12
14	A	$(\neg E)$, 13
15	B	$(\to E)$, 5, 14
16	$\bot$	$(\bot I)$, 4, 15
17	$\neg(A \to B)$	$(\neg I)$, 5 - 16
18	$\neg(A \to B) \land \neg B$	$(\land I)$, 4, 17
19	$\bot$	$(\bot I)$, 1, 18
20	$\neg\neg B$	$(\neg I)$, 4 - 19
21	B	$(\neg E)$, 20
22	$C \lor B$	$(\lor I_2)$, 21
23	$\bot$	$(\bot I)$, 3, 22
24	$\neg\neg(C \lor B)$	$(\neg I)$, 3 - 23
25	$C \lor B$	$(\neg E)$, 24

2/2P.

a)

4

Aufgabe 4.

$\neg(\neg A \land \neg B) = A \lor B$

Das ist keine Annahme, sonst wäre der Beweis trivial. (-0,5P.)

1	~~$((A \to C) \land (B \to C) \land \neg(\neg A \land \neg B)) \to C$~~	
2	$((A \to C) \land (B \to C)) \land \neg(\neg A \land \neg B)$	$\to E\ (1)$
3	$\neg(\neg A \land \neg B)$ sorry, passt :D	$\land E_2\ (2)$
4	$(A \to C) \land (B \to C)$	$\land E_1\ (2)$
5	$A \to C$	$\land E_1\ (4)$
6	$B \to C$	$\land E_2\ (4)$
7	$\neg C$	
8	A	
9	C	$\to E\ (5,8)$
10	~~T~~ $\bot$	$\bot J\ (7,9)$
11	$\neg A$	$\neg J\ (8-10)$
12	B	
13	C	$\to E\ (6,12)$
14	~~T~~ $\bot$	$\bot J\ (7,13)$
15	$\neg B$	$\neg J\ (12-14)$
16	$\neg A \land \neg B$	$\land J\ (11,15)$
17	$\bot$ ∀ $\neg\neg C\ (\neg I, 7-17)$ (-0,5P.)	$\bot J\ (3,16)$
18	C	$\neg J\ (7-17)$
19	$((A \to C) \land (B \to C) \land \neg(\neg A \land \neg B)) \to C$	$\to J\ (1,18)$

2|3P.

Aufgabe 6 a)

1 $(\psi \to \varphi) \lor \psi$

2 ψ

3 $(\psi \to \varphi) \lor \psi$ $\quad (\lor I_2), 2$

4 $\neg\psi$

5 ψ

6 $\perp$ $\quad (\perp I), 4, 5$

7 φ $\quad (\perp E), 6$

8 $\psi \to \varphi$ $\quad (\to I), 4\text{-}7$

9 $(\psi \to \varphi) \lor \psi$ $\quad (\lor I_1), 8$

10 $\neg(\psi \lor \neg\psi)$

11 ψ

12 $\psi \lor \neg\psi$ $\quad (\lor I_1), 11$

13 $\perp$ $\quad (\perp I), 10, 12$

14 $\neg\psi$ $\quad (\neg I), 11\text{-}13$

15 $\psi \lor \neg\psi$ $\quad (\lor I_2), 14$

16 $\perp$ $\quad (\perp I), 10, 15$

17 $\neg\neg(\psi \lor \neg\psi)$ $\quad (\neg I), 10\text{-}16$

18 $\psi \lor \neg\psi$ $\quad (\neg E), 17$

19 $(\psi \to \varphi) \lor \psi$ $\quad (\lor E), 18, 2\text{-}3, 4\text{-}9$ $\square$.

✓ 2/2 P.

4c)

Regeln:

1) $\neg\neg\phi = \phi$ 2) $\neg(\phi \wedge \psi) = \neg\phi \vee \neg\psi$

3) $\neg(\phi \vee \psi) = \neg\phi \wedge \neg\psi$ 4) $\neg\bot = \top$ 5) $\neg\top = \bot$

$$\phi = \neg(A \wedge (B \wedge \neg(A \vee \neg C)))$$

$$\overset{3)}{=} \neg(A \wedge (B \wedge (\neg A \wedge \neg\neg C))) \overset{1)}{=} \neg(A \wedge (B \wedge (\neg A \wedge C)))$$

$$\overset{2)}{=} \neg A \vee \neg(B \wedge (\neg A \wedge C)) \overset{2)}{=} \neg A \vee \neg B \vee \neg(\neg A \wedge C)$$

$$\overset{2)}{=} \neg A \vee \neg B \vee \neg\neg A \vee \neg C \overset{1)}{=} \neg A \vee \neg B \vee A \vee \neg C$$

0,5/1

Los, Punktetabelle!

A2	A3	A4	Σ
6	5	2	13

A2 : 6/6

A3 : 5/5

Eva Dengler

Lorenz Kästle

Dominik Huber

GLöLu

Datum

Name/Projekt

methodpark

4. a) Sei $m(\phi)$ definiert wie in der Aufgabenstellung.
du sollst es aber definieren, die Aufgabenst. ist da sehr informal und nur ein Hinweis

Sei $Op(\phi)$ die Anzahl der Operanden innerhalb von ϕ, die mit einem Negationsoperanden vor dem ϕ (also $\neg\phi$) ein „Paar" bilden können und somit als „Fehlstand" gelten.

wo kommt die 1 her?

$$m(\neg(\phi \wedge \psi)) \geq 1 + Op(\phi) + Op(\psi) + m(\phi) + m(\psi) >$$

$$> Op(\phi) + Op(\psi) + m(\phi) + m(\psi) = m(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

wieso?

analog $\neg(\phi \vee \psi)$:

s.o.

$$m(\neg(\phi \vee \psi)) \geq 1 + Op(\phi) + Op(\psi) + m(\phi) + m(\psi) >$$

$$> Op(\phi) + Op(\psi) + m(\phi) + m(\psi) = m(\neg\phi \wedge \neg\psi)$$

s.o.

$m(\neg\bot) = 1 > 0 = m(\top)$ ✓

$m(\neg\top) = 1 > 0 = m(\bot)$ ✓

$\Rightarrow$ diese Regeln verkleinern $m(\phi)$ immer.

Da $m(\phi) \geq 0$ (nach unten beschränkt) ist, sind diese Regeln nicht unendlich oft anwendbar.

$\neg\neg\phi = \phi$ ist offensichtlicherweise auch nicht beliebig oft anwendbar.

$\Rightarrow$ das Verfahren terminiert

0,5/3P.

4. b)

Sei $f(x) := \theta(x)$ die Hilfsfunktion aus der Aufgabenstellung

Seien $l := \phi$ und $r := \psi$

ZZ: . . . .

$\exists A$: $l' = l$

warum genau $\top$ und $\bot$? über l ist nichts gesagt

falls $l = \neg\bot$: $r = r' = \top$ $\quad f(l') = 0 = f(r')$ ✓

falls $l = \neg\top$: $r = r' = \bot$ $\quad f(l') = 0 = f(r')$ ✓

$\exists V$: $\quad f(l) = f(r) \Rightarrow f(l') = f(r')$

$\exists S_1$: $l' = \tilde{e} \wedge l$ und daher $r' = \tilde{e} \wedge r$; $\tilde{e}$ beliebig*

$f(l') = f(\tilde{e}) + f(l) + 1 \overset{\exists V}{=} f(\tilde{e}) + f(r) + 1 = f(r')$ ✓

$\exists S_2$: $l' = \tilde{l} \vee l$ und daher $r' = \tilde{e} \vee r$; $\tilde{e}$ beliebig*

$f(l') = f(\tilde{e}) + f(l) + 1 \overset{\exists V}{=} f(\tilde{e}) + f(r) + 1 = f(r')$ ✓

$\forall$ IS für $\neg l$

$\Rightarrow \left(f(l) = f(r) \Rightarrow f(l') = f(r') \right)$

* Sei o.B.d.A. $f(l) = f(r)$

Nein... oBdA zeigt du $l \wedge \_$, da $\wedge$ komm. gilt der Beweis auch für $\_ \wedge r$

WAS WILLST DU ZEIGEN?!?! >.<

IA: $m(e')=0$: $e=e'$

Wo ist der Zusammenhang?

was sind l und r?

falls $e'=\neg\bot$: daher $r=r'=T$

dann ist $m(l')=1$

$m(e')\not> m(r) \Rightarrow$ aus falscher Aussage alles Folgerbar ✓

falls $e'=\neg T$: dann $r=r'=\bot$

$m(e)\not> m(r) \Rightarrow$ aus falscher Aussage alles Folgerbar ✓

IV: $m(e)>m(r) \Rightarrow m(e')>m(r')$

IS₁: Sei $m(e)>m(r)$ $e'=\tilde{e}\wedge e$, dann $r'=\tilde{e}\wedge r$

$m(e')=m(\tilde{e})+m(e)+1 \overset{IV}{>} m(\tilde{e})+m(r)+1=m(r')$

IS₂: Sei $m(e)>m(r)$ $e'=\tilde{e}\vee e$, dann $r'=\tilde{e}\vee r$

$m(e')=m(\tilde{e})+m(e)+1 \overset{IV}{>} m(\tilde{e})+m(r)+1=m(r')$

Für die Formel $\neg\neg\phi=\phi$ ist $m(\neg\neg\phi)>m(\phi)$ nie erfüllt,

also gilt $m(e)>m(r)=m(e')>m(r')$

warum?

1/5

| GLoLn - Abgabe | Eva Dengler, Dominik Huber, Lorenz Käste

Aufgabe 6 a)

$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5$

$= (E \to Nv) \wedge (Mg \to KR) \wedge ((Nv \wedge MuT) \to Mg) \wedge (KR \to \neg E) \wedge E \wedge MuT$

$= (\neg E \vee Nv) \wedge (\neg Mg \vee KR) \wedge (\neg Nv \vee \neg MuT \vee Mg) \wedge (\neg KR \vee \neg E) \wedge E \wedge MuT$

$\{\neg E, Nv\}$ $\{\neg Mg, KR\}$ $\{\neg Nv, \neg MuT, Mg\}$ $\{\neg KR, \neg E\}$ $\{E\}$ $\{MuT\}$

$\{\neg Nv, Mg\}$ $\{\neg KR\}$

$\{Nv\}$

$\{Mg\}$

$\{KR\}$

$\{\}$ => nicht erfüllbar. ✓

3/3

Punkte:

4	5	6	7	Ges.
4	0	4	4	12

Aufgabe 7

$((\neg(B \wedge (\neg A \wedge \neg C))) \wedge (((A \rightarrow C) \wedge B) \vee (C \wedge A))) \rightarrow C$ ✓ (*)

$\equiv ((\neg B \vee \neg(\neg A \wedge \neg C)) \wedge ((\neg\neg(A \rightarrow C) \wedge B) \vee (C \wedge A))) \rightarrow C$

$\equiv ((\neg B \vee A \vee C) \wedge ((\neg(A \wedge \neg C) \wedge B) \vee (C \wedge A))) \rightarrow C$

$\xi = \neg(((\neg B \vee A \vee C) \wedge (((\neg A \vee C) \wedge B) \vee (C \wedge A))) \rightarrow C)$

$= ((\neg B \vee A \vee C) \wedge (((\neg A \vee C) \wedge B) \vee (C \wedge A))) \wedge \neg C$

$= (\neg B \vee A \vee C) \wedge (((\neg A \vee C) \wedge B) \vee C) \wedge (((\neg A \vee C) \wedge B) \vee A) \wedge \neg C$

$\cancel{= (\neg B \vee A \vee C) \wedge \neg C \wedge (((\neg A \wedge B) \vee (C \wedge B) \vee C)}$

$= (\neg B \vee A \vee C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee \neg A \vee C) \wedge (B \vee A)$

$= (\neg B \vee A \vee C) \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee B)$ ✓

$\{\neg B, A, C\}$ $\{\neg C\}$ $\{\neg A, C\}$ $\{B, C\}$ $\{A, B\}$

$\{A, C\}$

$\{C\}$

$\{\}$ ↯

ξ unerfüllbar $\Rightarrow$ Implikation aus (*) ist allgemeingültig

$\Rightarrow$ aus den Formeln folgt C. ✓

4/4

A6 b)

$$\{\neg E, V\} \quad (1)$$

$$\cancel{\{M, R\}} \quad \{\neg M, R\} \quad (2)$$

$$\{\neg V, \neg T, \neg M\} \quad (3)$$

$$\{\neg R, \neg E\} \quad (4)$$

$$\{\neg E, \neg T, \neg M\}\text{aus (1) und (3)} \quad (5)$$

$$\{R, \neg V, \neg T\}\text{aus (2) und (3)} \text{ f.} \quad (6)$$

$$\{M, \neg E\}\text{aus (2) und (4)} \text{ f.} \quad (7)$$

$$\{\neg E, \neg T, R\}\text{aus (5) und (2) oder (6) und (1)} \text{ f.} \quad (8)$$

$$\{\neg E, \neg T\}\text{aus (5) und (7) oder (8) und (4)} \text{ f.} \quad (9)$$

$$\{\neg V, \neg T, \neg E\}\text{aus (6) und (4) oder (7) und (3)} \text{ f.} \quad (10)$$

$$NNF((\neg E \vee V) \wedge (\neg M \vee R) \wedge (\neg(V \wedge T) \vee M) \wedge (\neg R \vee \neg E)) \quad (11)$$

$$(\neg E \vee V) \wedge (\neg M \vee R) \wedge (\neg V \vee \neg T \vee M) \wedge (\neg R \vee \neg E) \quad (12)$$

Damit ist sowohl NNF als auch die CNF hergestellt.

/ 1|3

5.

a)

$C' := C \cup \{A, B\} = \{\neg A, B, A, B\} = \{\neg A, A, B\}$

$D' := D \cup \{\neg A, \neg B\} = \{\neg A, \neg B, \neg A, \neg B\} = \{\neg A, \neg$

$C = (\neg A \vee B)$

$D = (\neg A \vee \neg B)$

$C' = C \cup \{(A \vee B)\} = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B) = B$ f.

$D = (\neg A \vee \neg B)$

$D' = D \cup \{\neg A, \neg B\} = (\neg A \vee \neg B) = D$

A	B	C	C'	D	C'∪D'	C∪D	
⊥	⊥	T	⊥	T	⊥	T	↯
⊥	T	T	T	T	T	T	
T	⊥	⊥	⊥	T	⊥	⊥	
T	T	T	T	⊥	⊥	⊥	

$\Rightarrow$ für $K(A) = \bot$ und $K(B) = \bot$ folgt

$K(C' \cup D') \neq K(C \cup D)$

Es ist sowohl $C \cup \{A, B\}$ $D \cup \{A, B\}$ (Prämiss

wie auch $C \cup D$ erfüllbar (mit gleichem K)

/0/3

b)

Beispielsweise

$$M = \{\{H_1 ++ B ++ \neg B ++ A ++ T_1\} \cup \{H_2 ++ \neg A ++ T_2\}\}$$

$$\frac{H_1 ++ B ++ \neg B ++ A ++ T_1 \qquad H_2 ++ \neg A ++ T_2}{H_1 \boxed{++ H_2} ++ B ++ \neg B ++ T_1 ++ T_2}$$

Enthält keine Veroderungen mehr

$\Rightarrow$ Resolution nicht mehr anwendbar

warum? H_1, H_2, T_1, T_2 kann doch noch etwas resolvierbares enthalten

Aber enthält trotzdem $B \wedge \neg B$

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$ keine CNF, obwohl es keine leere Menge ist, und die Resolution nicht mehr anwendbar ist

/ 0/3

Gloin Hausaufgabe
Abgabe 06
Aufgabe 4

~~Lorenz Kästle~~,

December 15, 2017

NNF

$$NNF(\neg(C \land B \land (C \to \neg B)) \land \neg(A \to (B \land \neg C)) \land (A \lor B)) \tag{1}$$
$$= NNF(\neg(C \land B \land (\neg C \lor \neg B)) \land \neg(\neg A \lor (B \land \neg C)) \land (A \lor B)) \tag{2}$$
$$= NNF((\neg C \lor \neg B \lor \neg(\neg C \lor \neg B)) \land (A \land \neg(B \land \neg C)) \land (A \lor B) \tag{3}$$
$$= NNF((\neg C \lor \neg B \lor (C \land B)) \land (A \land (\neg B \lor \neg\neg C)) \land (A \lor B)) \tag{4}$$
$$= NNF((\neg C \lor \neg B \lor (C \land B)) \land (A \land (\neg B \lor C)) \land (A \lor B)) \checkmark \tag{5}$$

CNF

$$CNF(\neg C \lor \neg B \lor (C \land B)) \land (A \land (\neg B \lor C)) \land (A \lor B)) \tag{6}$$
$$CNF(\neg C \lor \neg B \lor (C \land B)) \land CNF(A \land (\neg B \lor C)) \land CNF(A \lor B) \tag{7}$$
$$CNF(\underbrace{(\neg C \lor \neg B \lor C)}_{\top}) \land CNF(\underbrace{(\neg C \lor \neg B \lor B)}_{\top}) \land A \land CNF((\neg B \lor C)) \land (A \lor B) \tag{8}$$
$$A \land (\neg B \lor C) \land (A \lor B) \tag{9}$$
$$A \land (\neg B \lor C) \land (A \lor B) \tag{10}$$

✓

DNF

eigentlich von NNF aus, aber passt

$$DNF(A \land (\neg B \lor C) \land (A \lor B)) \tag{11}$$
$$DNF((\underbrace{A \land A}_{A} \land (\neg B \lor C)) \lor (B \land A \land (\neg B \lor C))) \tag{12}$$
$$DNF((A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor (\underbrace{B \land A \land \neg B}_{\bot}) \lor (B \land A \land C)) \tag{13}$$
$$(A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor (B \land A \land C) \checkmark \tag{14}$$

4/4

2.

1 2 3 4

$\{\neg E, V\}$ $\{M, R\}$ $\{\neg V, \neg T, \neg M\}$ $\{\neg R, \neg E\}$

1 3 5 2 3 6 2 4 ~~7~~

$\{\neg E, \neg T, \neg M\}$ $\{R, \neg V, \neg T\}$ $\{M, \neg E\}$

5 2 8 5 ~~7~~ 9 6 4 10 6 1 11 ~~7~~ 3 12

$\{\neg E, \neg T, R\}$ $\xrightarrow{4}$ $\{\neg E, \neg T\}$ $\xleftarrow{1}$ $\{\neg V, \neg T, \neg E\}$ $\{R, \neg E, \neg T\}$ $\{\neg E, \neg V, \neg T\}$

4

=

=

1. NNF $(\neg E \vee V) \wedge (\neg M \vee R) \wedge (\neg(V \wedge T) \vee M) \wedge (\neg R \vee \neg E)$

$\Rightarrow (\neg E \vee V) \wedge (\neg M \vee R) \wedge (\neg\{V \vee \neg T\} \vee M) \wedge (\neg R \vee \neg E)$

CNF ~~ist~~ damit schon hergestellt

BFS Blatt 07

A 37 a) $G = (V, E) \qquad C \subseteq V$

$\forall \{u, v\} \subseteq C, u \neq v : \{u, v\} \in E$

$\bar{G}$ ist Komplementgraph von G

$\not\forall\ \bar{G} = (\overset{*}{V}, \bar{E})$

Wenn C eine unabhängige Menge in $\bar{G}$ ist, dann gilt

$\forall \{u, v\} \subseteq C, u \neq v : \{u, v\} \notin E$

$\not\exists \{u, v\} \subseteq C, u \neq v : \{u, v\} \cancel{\notin} \in \bar{E}$

$E = \cancel{\forall} (x, y) \in V, \{x \neq y\}, \{x, y\} \notin \bar{E}$

$(\neg E \vee V) \wedge (\neg M \vee R) \wedge (\neg(V \wedge T) \vee M) \wedge (\neg R \vee \neg E)$

$\{\neg E, V\} \quad \{M, R\} \quad \{\neg V, \neg T, M\} \quad \{\neg R, \neg E\}$

$\{\neg E, \neg T, M\} \qquad \{M, \neg E\}$

$\{\neg E, \neg T, M\}$

$\{\neg E, V, \neg R\}$

$\{\neg E, \neg R, \neg T, M\}$

| GLoln - Abgabe | Eva Dengler, Dominik Huber, Lorenz Kästle

2a)

{P, W}, {¬R, P}, {¬P, W}, {P, Q, R}, {P,¬Q, R}, {¬P, W, U}, {¬P,¬W, R}, {¬P,¬W,¬R} =

= (PLE(U)) {P, W}, {¬R, P}, {¬P, W}, {P, Q, R}, {P,¬Q, R}, ~~{¬P, W}~~, {¬P,¬W, R}, {¬P,¬W,¬R} = ✓ ✗

= {W}, {¬R, P}, {P, Q, R}, {P,¬Q, R}, ~~{¬P, W}~~, {¬P,¬W, R}, {¬P,¬W,¬R} =

= (UP(W)) {¬R, P}, {P, Q, R}, {P,¬Q, R}, {¬P, R}, {¬P,¬R} =

= {¬R, P}, {P, R}, {¬P, R}, {¬P,¬R} =

= {P}, {¬P} =

= { }

⇨ Nicht konsistent ✓

/1,5/2

2 ~~3~~b)

{P, W, R, Q}, {P,¬W, R, Q}, {¬P, R}, {¬P,¬R}, {¬P,¬Q, W}, {P,¬W,¬R} =

= {P, W, R, Q}, {P,¬W, R}, {¬P, R}, {¬P,¬R}, {¬P, W}, {P,¬W,¬R} = wieso?!

= (PLE(Q)) ~~{P, W, R}~~, {P,¬W, R}, ~~{¬P, R}, {¬P,¬R}~~, {¬P, W}, {P,¬W,¬R} =

= ~~{P, W, R}~~, {P,¬W, R}, {¬P}, {¬P, W}, {P,¬W,¬R} = Alte klauseln dürft ihr nicht wegschmeißen.

= (UP(¬P)) {W, R}, {¬W, R}, {¬W,¬R} =

= {R}, {¬W,¬R} =

= (UP(R)) {W}

⇨ konsistent

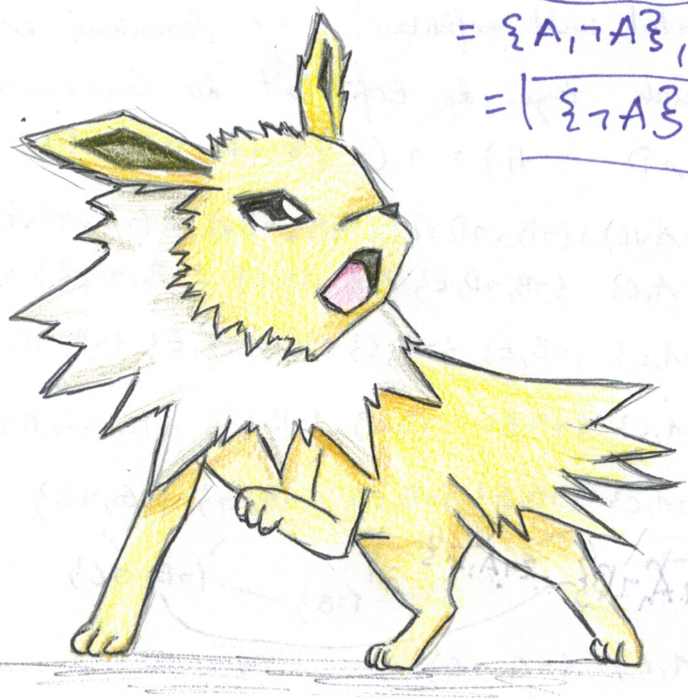
nicht erfüllbar

{A,B}, {¬A,¬B}, {¬A}, {¬B}

= {A,¬A}, {¬A}, {¬B}

= {¬A}, {¬B}

erfüllbar!



/0,5/2

A2	A3	A4	Σ
2	8	/	10

/2/4

Aufgabe 3

$CuCO_3 \hat{=} A$
$CuO \hat{=} B$
$CO_2 \hat{=} C$
$C \hat{=} D$
$Cu \hat{=} E$
$H_2 \hat{=} F$
$H_2O \hat{=} G$
$H_2CO_3 \hat{=} H$

$(\neg B \vee \neg D) \vee (E \wedge C)$ $\overset{\shortparallel}{}$ $\neg(B \wedge D) \vee (E \wedge C)$ $\quad (\neg B \vee \neg F) \vee (E \wedge G) \quad \neg G \vee \neg C \vee H$

Also:

$$\underbrace{(A \to B \wedge C) \wedge (B \wedge D \to E \wedge C) \wedge (B \wedge F \to E \wedge G) \wedge (G \wedge C \to H)}_{X}$$

a) $(X \wedge \cancel{(\ldots)}\ A \wedge F \wedge D) \to H$

-> Beweis mithilfe der Nichterfüllbarkeit der Gegenannahme, also

$$\neg(X \wedge \underset{\hat{}\,F \wedge D}{A} \to H) = \neg(\neg(X \wedge \underset{\hat{}\,F \wedge D}{A}) \vee H) = X \wedge A \wedge \neg H \wedge F \wedge D$$

$$= (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg F \vee E) \wedge (\neg B \vee \neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee \neg C \vee H) \wedge A \wedge \neg H \wedge F \wedge D$$

$\Rightarrow \{\neg A, B\}\ \{\neg A, C\}\ \{\neg B, \neg D, E\}\ \{\neg B, \neg D, C\}\ \{\neg B, \neg F, E\}\ \{\neg B, \neg F, G\}\ \{\neg G, \neg C, H\}\ \{A\}\ \{\neg H\}\ \{F\}\ \{D\}$

$\{B\}\quad \{C\}\quad \{\neg G, \neg C\}$

$\{\neg B, G\}$

$\{\neg B, \neg C\}$

$\{\neg B\}$

$\{\}$

-> Gegenteil nicht erfüllbar! -> Annahme erfüllbar :) ✓ 4/4

b) Beweis durch Zeigen der Erfülltheit der Gegenannahme

$$\neg(X \wedge F \wedge D \to H) = \neg(\neg(X \wedge F \wedge D) \vee H) = X \wedge F \wedge D \wedge \neg H$$

$$= (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee E) \wedge (\neg B \vee \neg D \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg F \vee E) \wedge (\neg B \vee \neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee \neg C \vee H) \wedge F \wedge D \wedge \neg H$$

$\Rightarrow \{\neg A, B\}\ \{\neg A, C\}\ \{\neg B, \neg D, E\}\ \{\neg B, \neg D, C\}\ \{\neg B, \neg F, E\}\ \{\neg B, \neg F, G\}\ \{\neg G, \neg C, H\}\ \{F\}\ \{D\}\ \{\neg H\}$

$\overset{UP}{\underset{D}{\Rightarrow}} \{\neg A, B\}\ \{\neg A, C\}\ \{\neg B, E\}\ \{\neg B, C\}\ \{\neg B, \neg F, E\}\ \{\neg B, \neg F, G\}\ \{\neg G, \neg C, H\}\ \{F\}\ \cancel{\{D\}}\ \{\neg H\}$

$\overset{UP}{\underset{F}{\Rightarrow}} \{\neg A, B\}\ \{\neg A, C\}\ \{\neg B, E\}\ \{\neg B, C\}\ \{\neg B, G\}\ \{\neg G, \neg C, H\}\ \{\neg H\}$

$\overset{UP}{\underset{\neg H}{\Rightarrow}} \{\neg A, B\}\ \{\neg A, C\}\ \{\neg B, E\}\ \{\neg B, C\}\ \{\neg B, G\}\ \{\neg G, \neg C\}$

sorry, ich bin blind :(

$\{\neg B\} \quad \{\neg B, \neg C\}$

$\overset{UP}{\underset{\neg B}{\Rightarrow}} \{\neg A\}\ \{\neg A, C\}\ \{\neg G, \neg C\}$

$\{\neg A, \neg G\}$

=> Keine leere Menge => erfüllbar ✓ 4/4

=> Annahme nicht erfüllbar

GLolu-Abgabe

Eva Dengler, Dominik Huber, Lorenz Kästle

A4	A5	A6	Σ
3	3	6	12

Aufgabe 4

$6 = s(s(\ldots(0)))$

a) $\text{Tetraeder}(x) := \exists n\,(x \times 6 = n \times s(n) \times s(s(n)))$

b) $\forall n\,(\exists w\,((w \times 4 = \text{Tetraeder}(n)) \vee (w \times 4 = \text{Tetraeder}(s(n)))))$

Tetraeder ist ein Prädikat. Ihr vergleicht Prädikat $\in \{\top, \bot\}$ mit Zahl $\in \mathbb{N}$

hier auch..

c) $\forall x\,(\exists n(\exists m(\text{Tetraeder}(n) = x \wedge m \times m \times m = x))$

$\to \exists z\,(x < z \wedge \exists j(\exists k(\text{Tetraeder}(j) = z \wedge k \times k \times k = z))))$

$\wedge\ \forall x\,(\exists n\,(\exists m\,(\text{Tetraeder}(n) = x \wedge m \times m \times m = x)))$

aber Idee passt

3/6

Aufgabe 6

a) • $(\phi \vee \psi)\sigma \mathrel{\hat{=}} (\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi))\sigma = \neg((\neg\phi \wedge \neg\psi)\sigma)$

$= \neg((\neg\phi)\sigma \wedge (\neg\psi)\sigma) \Rightarrow \neg(\neg(\phi\sigma) \wedge \neg(\psi\sigma))$ $= \phi\theta \vee \psi\theta$

• $(\exists x(\phi))\sigma = (\neg(\forall x(\neg\phi)))\sigma = \neg((\forall x(\neg\phi))\sigma)$

$= \neg(\forall y(\neg(\phi\sigma')))$, wobei $\sigma'(x) = y$, $\sigma'(z) = \sigma(z)$ für jedes $z \neq x$, und

y so gewählt, dass $y \in FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x(\neg\phi))$

$= \exists y(\phi\sigma')$?

2,5/3

Punkte:

4	5	6	Ges

Sorry, Glurak hats verbrannt :(

5. a)

$$FV(\forall x(\forall y(P(x) \to \forall x(P(y)))) \land \exists y(Q(x))) =$$

$$= FV(\forall x(\forall y(P(x) \to \forall x(P(y))))) \cup FV(\exists y(Q(x))) =$$

$$= FV(\forall y(P(x) \to \forall x(P(y)))) \setminus \{x\} \cup FV(Q(x)) \setminus \{y\} =$$

$$= FV(P(x) \to \forall x(P(y))) \setminus \{x,y\} \cup (FV(x) \setminus \{y\} =)$$ Was tut die Klammer ☺

$$= (FV(P(x)) \cup FV(\forall x(P(y)))) \setminus \{x,y\} \cup \underbrace{(\{x\} \setminus \{y\})}_{} =$$ Den Teil nicht vergessen!

$$= (FV(x) \cup (FV(P(y)) \setminus \{x\})) \setminus \{x,y\} \cup \{x\}$$

$$= (\{x\} \cup ((FV(y)) \setminus \{x\})) \setminus \{x,y\} \cup \{x\}$$

$$= (\{x\} \cup (\{y\} \setminus \{x\})) \setminus \{x,y\} \cup \{x\}$$

$$= \{x,y\} \setminus \{x,y\} \cup \{x\}$$

$$= \{x\}$$

1/2

b)

$$FV((P(x) \rightarrow R) \vee \exists x(\forall x(P(x) \vee \forall y(S(y,z))))) =$$

$$= FV(P(x) \rightarrow R) \cup FV(\exists x(\forall x(P(x) \vee \forall y(S(y,z))))) =$$

$$= FV(P(x)) \cup FV(R) \cup (FV(\forall x(P(x) \vee \forall y(S(y,z)))) \setminus \{x\}) =$$

$$= FV(x) \cup \{\ \} \cup (FV(P(x) \vee \forall y(S(y,z))) \setminus \{x\}) =$$

$$= \{x\} \cup ((FV(P(x)) \cup FV(\forall y(S(y,z)))) \setminus \{x\}) =$$

$$= \{x\} \cup ((FV(x) \cup (FV(S(y,z))) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}) =$$

$$= \{x\} \cup ((\{x\} \cup (FV(y) \cup FV(z)) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}) =$$

$$= \{x\} \cup ((\{x\} \cup ((\{y\} \cup \{z\}) \setminus \{y\})) \setminus \{x\}) =$$

$$= \{x\} \cup ((\{x\} \cup \{z\}) \setminus \{x\}) =$$

$$= \{x\} \cup \{z\} =$$

$$= \{x, z\}$$ ✓

/2|2

6 b)

1. $\left(\exists z\,(R(x,y)) \wedge Q(z,y)\right)\underbrace{[c/x, f(x,z)/y, c/z]}_{\sigma} =$

$= \left(\exists z\,(R(x,y))\right)\sigma \wedge Q(z,y)\sigma =$

$= \exists y\,(R(x,y)\sigma') \wedge Q(z\sigma, y\sigma) =$

wobei $\sigma' = (\sigma \cup [y/z]) \setminus [c/z]$

$= \exists y\,(R(x\sigma, y\sigma')) \wedge Q(c, f(x,z)) =$

$= \exists y\,(R(c, f(x,z))) \wedge Q(c, f(x,z))$

macht hier aber keinen Unterschied. Das weiß der Algo aber nicht

1,5/2

~~2. $\left(\exists x\,(P(z,x)) \wedge \forall y\,(R(y,z) \vee \exists z\,(T))\right)\underbrace{[f(x,y)/x, x/y, f(f(x,x),z)/z]}_{\sigma} =$~~

~~$= \left(\exists x\,(P(z,x))\right)\sigma \wedge \left(\forall y\,(R(y,z))\sigma \vee (\exists z\,(T))\sigma\right) =$~~

~~$= \left(\exists y\,(P(z,x)\sigma) \wedge (\forall y\,(R(y,z))\sigma \vee (\exists z\,(T))\sigma)\right) =$~~

~~$= (P(z\sigma, x\sigma) \setminus \{x\} \wedge (R(y,z)\sigma \setminus \{y\} \vee$~~

~~$= \left(\exists y\,(P(z\sigma, x\sigma)) \wedge \forall y\,(R(y,z)\sigma \vee (\exists y\,(T\sigma)))\right) =$~~

~~$= \left(\exists y\,(P(f(f(x,x),z), f(x,y))) \wedge (\forall y\,(R(y\sigma, z\sigma) \vee (\exists y\,(T))))\right) =$~~

~~$= \exists y\,(P(f(f(x,x),z), f(x,y)) \wedge \forall y\,(R(x, f(f(x,x),z)) \vee \exists y\,(T)$~~

noch mal extra schön aufgeschrieben:

Danke! ☺

2. $\left(\exists x\,(P(z,x)) \wedge \forall y\,(R(y,z) \vee \exists z\,(T))\right) \circ \underbrace{[f(x,y)/x,\ x/y,\ f(f(x,x),z)/z]}_{\sigma} =$

$= (\exists x\,(P(z,x)))\sigma \wedge (\forall y\,(R(y,z) \vee \exists z\,(T)))\sigma =$

$= \exists y\,(P(z,\cancel{y}^{\,x})\sigma') \wedge \forall y\,((R(y,z) \vee \exists z\,(T))\sigma') =$

$= \exists y\,(P(z\sigma',\cancel{x}\sigma')) \wedge \forall y\,(R(y,z)\sigma' \vee (\exists z\,(T))\sigma'') =$

$= \exists y\,(P(f(f(x,x),z),y)) \wedge \forall y\,(R(y\sigma',z\sigma') \vee \exists z\,(T\sigma'')) =$

$= \exists y\,(P(f(f(x,x),z),y)) \wedge \forall y\,(R(y,f(f(x,x),z)) \vee \exists z\,(T))$

$\sigma' := [\cancel{f(x,y)/x},\ x/y,\ y/x,\ f(f(x,x),z)/z]$

σ' ist Funktion. Dann kann es nicht 2 Funktionswerte für x geben

$\sigma'' := [f(x,y)/x,\ f(f(x,x),z)/z]$

1/2

Jetzt musst du mir nur erklären, wie du am Ende aufs richtige Ergebnis kamst :D

6 c)

Es muss $y = \sigma(x)$ gewählt werden. ✓

Dann folgt aus der Definition von σ' (und da σ injektiv ist) dass $\sigma' = \sigma$

und wieso?

$$\sigma' := [x_{n1}/x_1, \dots y/x_e, \dots x_{nk}/x_k] =$$
$$= [x_{n1}/x_1, \dots \sigma(x)/x_e, \dots x_{nk}/x_k] = \sigma$$

$e \in \{1, \dots, k\}$

1/3

6/10

GLoLu - Abgabe

Eva Dengler, Dominik Huber, Lorenz Köstle

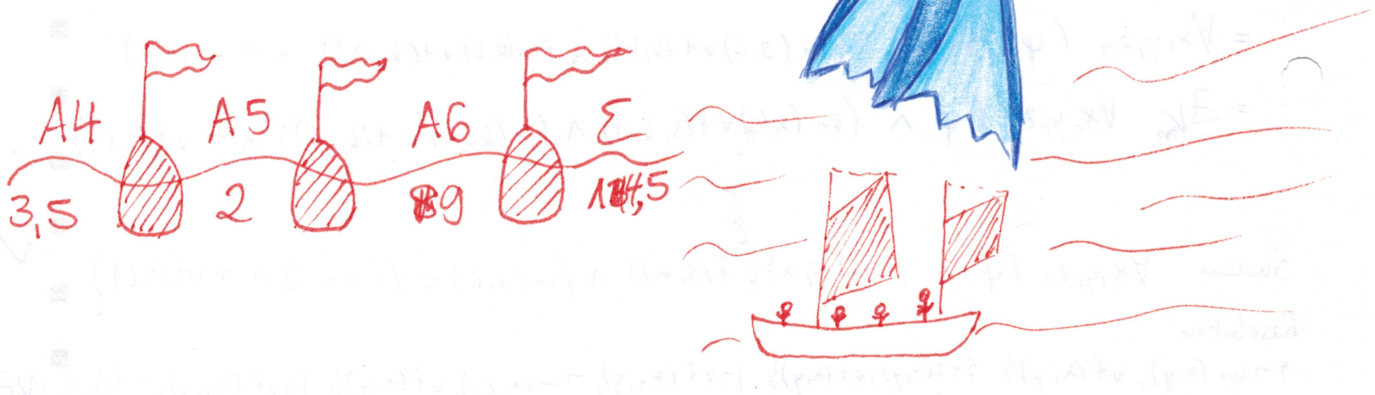
3)

1	$\exists x\ (P(x) \land \forall y\ (D(y) \to L(x,y)))$	
2	$\forall x\ (P(x) \to \forall y\ (Q(y) \to \neg L(x,y)))$	
3	$\boxed{c}$	
4	$P(c) \land \forall y\ (D(y) \to L(c,y))$	
5	$P(c)$	$(\land E_1, 4)$
6	$\forall y\ (D(y) \to L(c,y))$	$(\land E_2, 4)$
7	$P(c) \to \forall y\ (Q(y) \to \neg L(c,y))$	$(\forall E, 2)$
8	$\forall y\ (Q(y) \to \neg L(c,y))$	$(\to E, 5, 7)$
9	$\boxed{d}$	
10	$D(d) \to L(c,d)$	$(\forall E, 6)$
11	$Q(y) \to \neg L(c,d)$	$(\forall E, 8)$
12	$D(d)$	
13	$L(c,d)$	$(\to E, 10, 12)$
14	$Q(d)$	
15	$\neg L(c,d)$	$(\to E, 11, 14)$
16	$\bot$	$(\bot I, 13, 15)$
17	$\neg Q(d)$	$(\neg I, 14-16)$
18	$D(d) \to \neg Q(d)$	$(\to I, 12-17)$
19	$\forall x\ (D(x) \to \neg Q(x))$	$(\forall I, 9-18)$
20	$\forall x\ (D(x) \to \neg Q(x))$ ✓	$(\exists E, 1, 3-19)$

A3	A4	A5	Σ
5	9	5	19 :(

GLoLu - Abgabe

Eva Dengler
Dominik Huber
Lorenz Köstle



Aufgabe 6

a) x ist Vorfahre von y: $vf(x,y)$

x ist Mutter von y: $m(x,y)$

x ist „father" von y: $f(x,y)$

y ist Enkelkind von x: $e(x,y)$

$$\phi := \cancel{\forall x,y}\ \big((m(x,y) \lor f(x,y) \lor \exists z (vf(z,y) \land (m(x,z) \lor f(x,z)))) \to vf(x,y)\big)$$ ✓ 2/2

b) $e(\cancel{y,x}) := \exists k\ \big((m(x,k) \lor f(x,k)) \land (m(k,y) \lor f(k,y))\big)$ 2/2

c) $\cancel{\forall x,y\,(e(y,x) \to vf(x,y))}$ mit Luke $\hat{=}\ l$, Shmi $\hat{=}\ s$

$$\phi \to (e(s,l) \to vf(s,l))$$

Resolution: Nichterfüllbarkeit des Gegenteils:

$$\neg(\phi \to (e(s,l) \to vf(s,l))) = \neg(\neg\phi \lor (\neg e(s,l) \lor vf(s,l)))$$

$$= \phi \land \neg(\neg e(s,l) \lor vf(s,l)) = \phi \land e(s,l) \land \neg vf(s,l)$$ ✓

Zwischenrechnung für ϕ

$$\phi := \cancel{\forall x,y}\ \big((m(x,y) \lor f(x,y) \lor \exists z (vf(z,y) \land (m(x,z) \lor f(x,z)))) \to vf(x,y)\big)$$

$$= \cancel{\forall x,y}\ (\neg (\quad ☺ \quad) \lor vf(x,y))$$

$$= \cancel{\forall x,y}\ ((\neg m(x,y) \land \neg f(x,y) \land (\neg\exists z (vf(z,y) \land (m(x,z) \lor f(x,z))))) \lor vf(x,y))$$

$$(\forall z (\neg vf(z,y) \lor (\neg m(x,z) \land \neg f(x,z))))$$

$$(\forall z ((\neg vf(z,y) \lor \neg m(x,z)) \land (\neg vf(z,y) \lor \neg f(x,z))))$$

$$= \cancel{\forall x,y}, z_1\ \underbrace{((\neg m(x,y) \lor vf(x,y)) \land (\neg f(x,y) \lor vf(x,y)) \land (\neg vf(z_1,y) \lor \neg m(x,z_1) \lor vf(x,y)) \land (\neg vf(z_1,y) \lor \neg f(x,z_1) \lor vf(x,y)}_{=\varphi}$$

$$= \phi'$$

$$= \forall x,y,z_1\ (\varphi) \land \exists k ((m(s,k) \lor f(s,k)) \land (m(k,l) \lor f(k,l))) \land \neg vf(s,l)$$

$$= \exists k_1\ \forall x,y,z_1\ (\varphi \land (m(s,k_1) \lor f(s,k_1)) \land (m(k_1,l) \lor f(k_1,l)) \land \neg vf(s,l))$$

Skolem: $\forall x,y,z_1\ (\varphi \land (m(s,a) \lor f(s,a)) \land (m(a,l) \lor f(a,l)) \land \neg vf(s,l))$ ✓

Resolution:

$\{\neg m(x,y), vf(x,y)\}$ $\{\neg f(x,y), vf(x,y)\}$ $\{\neg vf(z_1,y), \neg m(x,z_1), vf(x,y)\}$ $\{\neg vf(z_1,y), \neg f(x,z_1), vf(x,y)\}$

$\{\neg vf(s,l)\}$

$\{\neg vf(z_1,l), \neg m(s,z_1)\}$ ✓

$\{m(s,a), f(s,a)\}$

$\{\neg vf(a,l), f(s,a)\}$ ✓

$\{\neg vf(z_1,l), \neg f(s,z_1)\}$ ✓

$\{m(a,l), f(a,l)\}$

$\{\neg vf(a,l)\}$ ✓

$\{\neg f(a,l)\}$ ✓

$\{m(a,l)\}$ ✓

$\{\neg m(a,l)\}$ ✓

$\{\}$ ✓

=> Gegenteil nicht erfüllbar 5/5

=> Aussage wahr :) ✓

9/9

Datum 10

Name/Projekt Glain HA ~~8~~

methodpark

22.10.2018

Das bezweifle ich ;)

A5)

a) z.Z.: Reflexivität

$\sigma \lesssim \sigma\tau$

Es braucht also eine Substitution τ für das gilt.

Idee: τ substituiert nur Elemente, die nicht in σ enthalten sind $\Rightarrow$ τ ~~ist~~ substituiert $[a/b]$, wobei $a, b \notin \sigma$

Somit $\sigma = \sigma\tau$ ✓

(subst. kann leer sein oder zB. x/x)

Transitivität

Es sei $a \trianglelefteq b$ und $b \trianglelefteq c$, $a = (c\theta)\tau$

also $a = b\tau$ und $b = c\sigma$, somit $a = (b\tau)\sigma \Rightarrow a = a\theta$

das ist nicht unb. der Fall

Wie in A2 festgestellt ist damit $a = b(\tau\sigma)$ ~~und~~

$\tau\sigma$ ist also eine Verkettung von Substitutionen.

Damit gibt es eine Substitution θ für gilt $a = c\theta$

und damit $a \trianglelefteq c$ $\square$ Dies kann beliebig wiederholt werden

Argumentation funktioniert trotzdem

/2|3

b) ~~$\{a + x \doteq b + y\}$~~ ~~$\{a \doteq b,\ x \doteq y\}$~~

~~orient~~

~~$x + a \doteq b + y$~~

~~orient~~

~~$x + a \doteq y + b$~~

~~decomp~~

$\forall$ Gleichung

$\{y \doteq A\}, x \doteq A\}$

Soll A Konstante sein? oder Term?

$[x/A]$ //(elim) $\qquad [y/A]$

$\{y \doteq x\} \qquad \{x \doteq y\}$

diese Regel würde überall wo x steht A einsetzen oder wo y steht A einsetzen

0/2

z.B.

$$\{f(x,y) \doteq f(y,x)\}$$

$$\xrightarrow{decomp} \{x \doteq y,\ y \doteq x\}$$

$$\xrightarrow{elim} \{x \doteq y,\ y \doteq y\} \xrightarrow{del} \{x \doteq y\}$$

$$\xrightarrow{elim} \{x \doteq x,\ y \doteq x\} \xrightarrow{del} \{y \doteq x\}$$

4 a)

$$\{ i(i(x)) \cdot (x \cdot y) \doteq i(y) \cdot (y \cdot i(e)) \}$$

$$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{ i(i(x)) \doteq i(y),\ (x \cdot y) \doteq (y \cdot i(e)) \}$$

$$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{ i(x) \doteq y,\ x \doteq y,\ y \doteq i(e) \}$$

$$\xrightarrow{\text{orient}} \{ y \doteq i(x),\ x \doteq y,\ y \doteq i(e) \}$$

$$\xrightarrow{\text{elim}} \{ y \doteq i(x),\ x \doteq i(x),\ y \doteq i(e) \}$$

$$\xrightarrow{\text{elim}} \bot$$

✓ 2/2

b) $\{ i(z \cdot i(x)) \cdot y \doteq y \cdot i(z \cdot e) \}$

$$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{ i(z \cdot i(x)) \doteq y,\ y \doteq i(z \cdot e) \}$$

$$\xrightarrow{\text{orient}} \{ y \doteq i(z \cdot i(x)),\ y \doteq i(z \cdot e) \}$$

$$\xrightarrow{\text{elim}} \{ y \doteq i(z \cdot i(x)),\ i(z \cdot i(x)) \doteq i(z \cdot e) \}$$

$$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{ y \doteq i(z \cdot i(x)),\ z \cdot i(x) \doteq z \cdot e \}$$

$$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{ y \doteq i(z \cdot i(x)),\ z \doteq z,\ i(x) \doteq e \}$$

$$\xrightarrow{\text{delete}} \{ y \doteq i(z \cdot i(x)),\ i(x) \doteq e \}$$

$$\xrightarrow{\text{orient}} \{ y \doteq i(z \cdot i(x)),\ \underbrace{e \doteq i(x)}_{} \}$$

$$\xrightarrow{\text{conflict}} \bot$$

e ist Konstante
⇒ conflict anwendbar

1/2

ohne Occurs-Check kann es z.B.

bei $\{x \cdot x \doteq f(y) \cdot f(z)\}$

$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{x \doteq f(y),\ x \doteq f(z)\}$

2 Möglichkeiten geben, mit der elim-Regel

weiter zu machen:

Nein, den Teil lassen wir ja weg

1. $\xrightarrow{\text{elim}} \bot$ $\Rightarrow$ kein MGU

2. $\xrightarrow{\text{elim}} \{x \doteq f(y),\ f(y) \doteq f(z)\}$

$\xrightarrow{\text{decomp (intro)}} \{x = f(y),\ y = z\}$ $\Rightarrow$ ein MGU existiert

$\Rightarrow$ Algorithmus widerspricht sich selbst

und ist nicht eindeutig

Was passieren kann,
zB bei (b):

Term $\{z \doteq z\}$ wird ewig weiter durch
sich selbst ersetzt
$\Rightarrow$ Algo terminiert nicht

0,5/2

3,5/6

Datum Gloin ♡

Name/Projekt (endlich ist es vorbei)

A3	A4	Σ
15,5	2	17,5

Mal: Name hinschreiben!

$\boxed{A3}$ b)

$\mathbb{N}[\![0]\!] = 0,\ \mathbb{N}[\![s(x)]\!] = x+1,\ \mathbb{N}[\![x+y]\!] = x+y,\ \mathbb{N}[\![x \cdot y]\!] = x \cdot y,\ \mathbb{N}[\![R(x,y)]\!] = (y \leq x)$

$\mathbb{N} \models \forall x\ (R(x,x)) \Leftrightarrow \mathbb{N}, \underbrace{[n/x]}_{\sigma} \models R(x,x) \Leftrightarrow \mathbb{N}[\![R(x,x)]\!]\sigma$ (1)

$\Leftrightarrow \{(x,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x$ ist größer oder gleich $x\}\sigma$

$\Leftrightarrow \{(n,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n$ ist größer oder gleich $n\}$ $\square$. ✓

$\mathbb{N} \models \forall x,y,z\ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$

$\Leftrightarrow \mathbb{N} \models \forall x,y,z\ (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z))$

$\Leftrightarrow \mathbb{N}, \underbrace{[a/x, b/y, c/z]}_{\sigma} \models \neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)$

$\Leftrightarrow \mathbb{N},\sigma \not\models R(x,y) \vee \mathbb{N},\sigma \not\models R(y,z) \vee \mathbb{N},\sigma \models R(x,z)$ (2)

$\Leftrightarrow \neg\mathbb{N}[\![R(x,y)]\!]\sigma \vee \neg\mathbb{N}[\![R(y,z)]\!]\sigma \vee \mathbb{N}[\![R(x,z)]\!]\sigma$

mit Kurzfassung von $R(x,y) = y \leq x$ folgt:

$\Leftrightarrow (\neg(y \leq x))\sigma \vee (\neg(z \leq y))\sigma \vee (z \leq x)\sigma$

$\Leftrightarrow (y > x)\sigma \vee (z > y)\sigma \vee (z \leq x)\sigma \Leftrightarrow \underset{1.}{(a<b)} \vee \underset{2.}{(b<c)} \vee \underset{3.}{(c \leq a)}$

FU:

$a>b>c$	3.	stimmt
$a>b=c$	3.	"
$a>b<c$	2.	stimmt
$a=b>c$	3.	stimmt
$a=b=c$	3.	stimmt
$a=b<c$	2.	stimmt.
$a<b>c$	1.	stimmt
$a<b=c$	1.	stimmt
$a<b<c$	1.	stimmt

✓

$\Rightarrow \square$

$\mathbb{N} \models \forall x,y\, (\underset{a,b}{\exists} z\, (R(z,\cancel{x}) \wedge R(z,y)))$

$\Rightarrow \mathbb{N}, [a/x, b/y] \models \exists z\, (R(z,x) \wedge R(z,y))$

$\Rightarrow$ für alle x, y gibt es ein z, sodass $\mathbb{N},\sigma \models R(z,x) \wedge \mathbb{N},\sigma \models R(z,y)$

$\Rightarrow$ für alle x, y gibt es ein z, sodass $\mathbb{N}[\![R(z,x)]\!]\sigma \wedge \mathbb{N}[\![R(z,y)]\!]\sigma$ (3)

$\Rightarrow$ es gibt ein z, sodass $R(z,a) \wedge R(z,b)$

$\Rightarrow$ es gibt ein z, sodass z größer oder gleich a ist und z größer oder gleich b ist

erfüllt, da wir z als das größere von a und b wählen können □.

$\mathbb{N} \models \forall x\, (\exists y\, (\neg R(x,y)))$

$\Rightarrow \mathbb{N}, [a/x] \models \exists y\, (\neg R(\cancel{x},y))$

$\Rightarrow$ für alle x gibt es ein y, sodass $\mathbb{N},\sigma \models \neg R(x,y)$ (4)

$\Rightarrow$ für alle x gibt es ein y, sodass $\mathbb{N},\sigma \not\models R(x,y)$

$\Rightarrow$ für alle x gibt es ein y, sodass $\mathbb{N},\sigma \models \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x$ ist kleiner als $y\}$

$\Rightarrow$ es gibt ein y, sodass $\{(a,y) \mid a$ ist kleiner als $y\}$

erfüllt für $y = s(a)$ □. ✓

/7/7

Aufgabe 4

wir betrachten Präordnungen, also folgende Regeln auf endl. Menge M mit $x_1 \lesssim x_2 \lesssim \ldots \lesssim x_n$

für alle $a, b \in M$: $a \lesssim a$

für alle $a, b, c \in M$: $a \lesssim b$ und $b \lesssim c$, dann $a \lesssim c$

(für alle $a, b \in M$: $a \lesssim b$ und $b \lesssim a$, dann $a = b$ (Antisymmetrie Blatt 10))

Wir wissen doch gar nichts über R

→ funktioniert auf endlichen Mengen, da alle aus dieser Menge

für alle $a, b \in M$ gibt es ein c sodass: $a \lesssim c$ und $b \lesssim c$

Es gibt dieses $c \in M$ auf endl. Mengen immer:

~~Nein Das folgt nicht aus den Axiomen~~

wenn $a \lesssim b$ dann sei $c = b$, *

wenn $b \lesssim a$ dann sei $c = a$

für alle $a \in M$ gibt es ein b sodass $\neg (a \lesssim b) \overset{?}{=} a \not\lesssim b$ Der Zhg. gilt nicht

also zB $a = x_2$ und $b = x_1$. Hier gilt $x_1 \lesssim x_2$, also $x_2 \not\lesssim x_1$.

wenn aber $a = x_1$, gibt es kein b sodass $b \lesssim x_1$, also $x_1 \not\lesssim b$

$\Rightarrow$ alle gemeinsam können nicht gelten ☹

* woher weißt du dass immer einer der beiden Fälle gilt?

/2/5

A3 a) $\forall x(\exists y(\neg R(x,y)))$

$\rightarrow$ Skolemform: $[{}^{c}/_{y}]$

$\forall x(\neg R(x,c))$

$\rightarrow$ Klauselform: $\neg R(x,c)$

~~$\forall x(\exists y(R(y,x$~~

Hier fehlt die Klausel für die obige Formel

$\neg(\forall x(R(x,x)) \wedge \forall x,y,z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)) \wedge$

$\forall x,y(\exists z(R(z,x) \wedge R(z,y)))) \rightarrow \forall x(\exists y(R(y,x) \wedge \neg R(x,y)))$

$\forall x,y,z$

$= \cancel{\forall x} \neg(\cancel{\exists x}[R(x,x) \wedge \cancel{\exists}(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))) \wedge$

Quantor hierfür fehlt

$(\forall x(\forall y(\exists z(R(z,x) \wedge R(z,y))))) \rightarrow \forall x(\exists y(R(y,x) \wedge \neg R(x,y)))$

$= \exists x(\forall y,z(R(x,x) \wedge ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))) \wedge$

hier fehlt auch wieder ein Quantor für X

$\forall y(\exists z(R(z,x) \wedge R(z,y))) \wedge \neg(\exists y(R(y,x) \wedge \neg R(x,y)))) =$

$= \exists x(\forall y,z(R(x,x) \wedge (\neg(R(x,y) \wedge R(y,z)) \vee R(x,z))) \wedge$

$\forall y(\exists z(R(z,x) \wedge R(z,y))) \wedge (\forall y(\neg R(y,x) \vee R(x,y)))) =$

$= \exists x(\forall y(\forall z(R(x,x) \wedge (\neg(R(x,y) \wedge R(y,z)) \vee R(x,z))) \wedge$

$\exists z\,(R(z,x) \wedge R(z,y))) \wedge (\neg R(y,x) \vee R(x,y)))) =$

$= \exists x \forall y (\forall z (R(x,x) \wedge (\neg (R(x,y) \wedge R(y,z)) \vee R(x,z)))) \wedge$

$\cancel{\exists z (R(z,x) \wedge R(z,y))) \wedge}$

$\forall z (\neg (R(z,x) \wedge R(z,y))) \wedge (\neg R(y,x) \vee R(x,y))))\} =$

$\exists x \forall y \forall z (R(x,x) \wedge (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)) \wedge$

$(\neg R(z,x) \vee \neg R(z,y)) \wedge (\neg R(y,x) \vee R(x,y))) =$

$[c/x]$

$\Rightarrow \forall y \forall z (R(c,c) \wedge (\neg R(c,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(c,z)) \wedge$

$(\neg R(z,c) \vee \neg R(z,y)) \wedge (\neg R(y,c) \vee R(c,y))) =$

Falsche Skolem-/Klauselform (s.o.)

Skolem

$R(c,c) \wedge (\neg R(c,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(c,z)) \wedge$

$(\neg R(z,c) \vee \neg R(z,y)) \wedge (\neg R(y,c) \vee R(c,y))$

(1) $\{R(c,c)\}$, (2) $\{\neg R(c,y), \neg R(y,z), R(c,z)\}$, (3) $\{\neg R(z,c), \neg R(z,y)\}$, (4) $\{\neg R(y,c), R(c,y)\}$

$\cancel{\{\neg R(y,z), R(x,z)\}}$

(5) $\{\neg R(y,z), R(c,z), \neg R(y,c)\}$ (2)(4)

$[c/z]$

(1)(3)

(6) $\{\neg R(c,y)\}$

$[c/y]$

(6)(1)

(7) $\{\ \}$ ✓

2,5 / 7

Datum

Name/Projekt

methodpark

c)

~~z.z.~~ ~~H~~

Sei $R(x,y) := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{N} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{N} \right\}$ definiert auf $\mathbb{N}$,

wobei hier $0 \notin \mathbb{N}$. R ist:

- Reflexiv, da $R(x,x) \Leftrightarrow \frac{x}{x} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{N}$ ✓
- Transitiv: Sei $R(x,y) \wedge R(y,z)$ *

  Dann gilt * $y := b \cdot z \wedge x := a \cdot y = a \cdot b \cdot z$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

  $R(x,z) \Leftrightarrow R(a \cdot b \cdot z, z) \Leftrightarrow \frac{a \cdot b \cdot z}{z} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \cdot b \in \mathbb{N}$ ✓
- mit Existenz einer oberen Schranke:

  Sei $z := x \cdot y$

  $R(z,x) \wedge R(z,y) \Leftrightarrow R(x \cdot y, x) \wedge R(x \cdot y, y) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{x \cdot y}{x} \in \mathbb{N} \wedge \frac{x \cdot y}{y} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{N}$ ✓
- mit Gültigkeit der Formel (4):

  Sei $y := 2 \cdot x$

  $\neg R(x,y) \Leftrightarrow \neg R(x, 2x) \Leftrightarrow \frac{x}{2x} \notin \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ ✓

* für mindestens 2 Elemente aus $\mathbb{N}$ gilt, dass sie unvergleichbar sind: $\neg R(2,3) \Leftrightarrow \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$, und $\neg R(3,2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. ✓

6/6

* Falls nicht, kommt man auf $\perp \to R(x,z) \Leftrightarrow T$

und Transitivität ist gegeben.

G -Übung

gültig - wahr (immer)
erfüllbar - wahr mögl.

methodpark

Dat

Nar

23.10.2017

② -1 ①/②

IV: $g = \frac{n^2+n+2}{2}$

IS: $n \to n+1$

zZ: $g_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$

$g_{n+1} = \frac{n^2+n+2}{2} + n+1 = \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} = g_{n+1}$ □

③ zZ: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - f(n)$ für $f(n) > 0$.

Sei $f(n) = \frac{1}{n}$.

IA: $n=1$ $\frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ ✓

IV: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

IS: $n \to n+1$ z.Z. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

LS: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

z.Z: $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ → gilt, da $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$

Übung 1,5

2. IA: $n=1$: $l=0 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0 + 1$ ✓
   IS: $\exists l \in \mathbb{N}$ für ein n sodass $n = 2l$ oder $n = 2l+1$
   sei n gerade, also $n = 2l \Rightarrow n+1 = 2l+1$ ✓
   sei n ungerade, also $n = 2l+1 \Rightarrow n+1 = 2l+2 = 2(l+1) = 2l_x$ ✓

3. IA: $n=4$: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $2^4 = 16$ ✓
   IS: gelte $n! > 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \geq 4$
   $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ Werte}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ Werte}}$
   zZ. $(n+1)! \overset{?}{>} 2^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)\, n! \overset{?}{>} 2^n \cdot 2$ jetzt noch z.Z: $(n+1) > 2$ $\forall n \geq 4$ ✓

4. IA: $n=4$: $4 \cdot \sqrt{4} > 4 + \sqrt{4} \Leftrightarrow 8 > 6$ ✓
   IS: gelte $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ für $n \in \mathbb{N} \geq 4$.
   z.Z. $(n+1) \cdot \sqrt{n+1} > (n+1) + \sqrt{n+1}$
   $(n+1)\sqrt{n+1} = n\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > n\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \overset{IV}{>} n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \overset{n \geq 4}{>} n + 1 + \sqrt{n+1}$

7. IA: $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^1 + \frac{1}{a^1} \in \mathbb{N}$ ✓
   IS: gelte für alle k $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^k + \frac{1}{a^k} \in \mathbb{N}$
   zZ. $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} \in \mathbb{N}$
   $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = a^n \cdot a + \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a} = \underbrace{\left(a + \frac{1}{a}\right)}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}$ nat. Zahl

8. IA: $n=1$ $1^2 + 1 = 2$ gerade ✓
   IS: gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ $n^2 + n$ gerade
   $(n+1)^2 + n+1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2(n+1)$ gerade ✓

6. IA: $E=0$: $F=0$, $V=1 \Rightarrow |F| - |E| + |V| = 1$
   IS: $|E| \to |E|+1$: (gelte $|F| - |E| + |V| = 1$.)
   Fall 1: bestehende Knoten zu bestehende: Flächen +1 $\Rightarrow |F|+1 - (|E|+1) + |V| = 1$ ✓
   Fall 2: bestehende Knoten zu neue Knoten: Knoten +1 $\Rightarrow |F| - (|E|+1) + |V|+1 = 1$ ✓

IA: $\varphi_1 = \top$, φ_2 ist gültig

IV: φ_1 ist gültig, φ_2 ist gültig

IS: $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ Nach IV sind φ_1, φ_2 gültig $\Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2$ gültig. für $\varphi_1 \wedge \varphi_2$

0. IA: $\varphi_1 = \top \Rightarrow$ erfüllbar
$\varphi_2 = a \Rightarrow$ erfüllbar

IV: φ_i ist erfüllbar, $i \in \{1,2\}$

IS: $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ $\quad \varphi_2$ erfüllbar $\Rightarrow \varphi$ erfüllbar

Übung 2 - Aufgabe 1

a) $K = [Dw = \bot, G = \bot, Do = \bot]$ nicht gültig $\rightarrow K = [I \mapsto \top, SI \mapsto \bot, O \mapsto \bot]$

b) $(I \wedge O \wedge \neg SI) \vee SI = O \vee SI$ nicht gültig: $K = [I \mapsto \top, O \mapsto \top, SI \mapsto \bot]$

c) gültig

2. oberen beide schon Gegenbsp, 3. mit $K(G) = \bot$ und $K(Do) = \top$

3. a) $(G \vee Dw) \rightarrow Do$

falsch: $K(I) = \top$, $K(SI) = \top$, $K(O) = \top$

wahr: $K(I) = \bot$, $K(SI) = \top$, $K(O) = \top$

b) $I \vee SI \vee O$

falsch: $K(I) = \bot$, $K(SI) = \bot$, $K(O) = \bot$

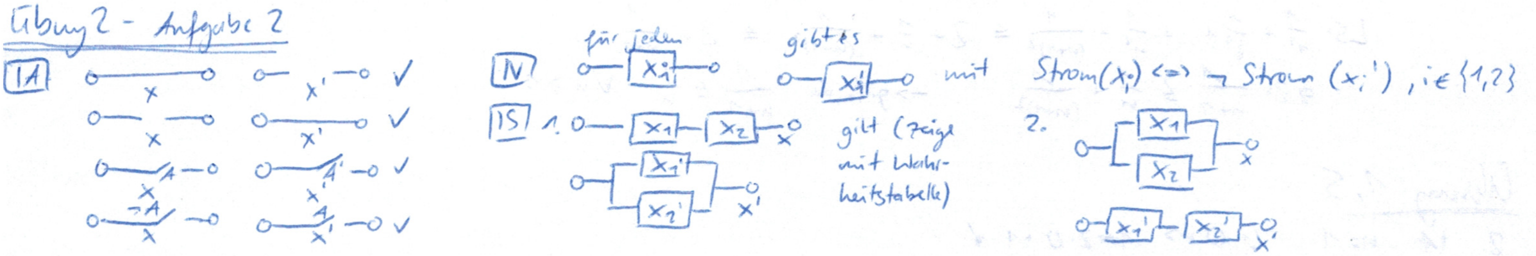
wahr: $K(I) = \top$, $K(SI) = \top$, $K(O) = \top$

c) $(I \wedge O) \vee (\neg Do \wedge Dw) \vee (\neg Dw \wedge Do)$

falsch: $K(I) = \bot$, $K(SI) = \bot$, $K(O) = \top$

wahr: $K(I) = \top$, $K(SI) = \top$, $K(O) = \top$

Übung 2 - Aufgabe 2



Übung 2Z - Aufgabe 1

F: Flügel

Fl: Fliegen

Ü: Schlechtes Wetter

☂:

$F \rightarrow Fl$

$F \rightarrow$ ☂

Ü $\rightarrow \neg Fl$

Ü $\rightarrow$ ☂

F	Fl	Ü	☂	F → Fl	F → ☂	Ü → Fl	Alle 3	Ü → ☂
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

} Implikation

Übung 2Z - Aufgabe 2

J: Jones wahr

S: Smith ist Mörder

G: getroffen

M: Mord nach Mitternacht

$\bar{J} \vee S$

$G \rightarrow S \vee M$

$\bar{S} \rightarrow G \vee M$

$M \rightarrow J$

J	S	G	M	$\bar{J} \vee S$	G
1	1	1	1		
1	1	1	0		
1	1	0	1		
1	1	0	0		
1	0	1	1		
1	0	1	0		
1	0	0	1		
1	0	0	0		
0	1	1	1		
0	1	1	0		
0	1	0	1		
0	1	0	0		
0	0	1	1		
0	0	1	0		
0	0	0	1		
0	0	0	0		

GLoLo - Übung

zz. φ gültig $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ nicht erfüllbar

$\boxed{IA}$ $\varphi = \bot$, $\neg\varphi = \neg\bot = T$

$\varphi = A$, $A \in \mathcal{A}$, $\neg\varphi = \neg A$ $\quad$ φ gültig $\Leftrightarrow$ A gültig $\Leftrightarrow \forall K \;\; K \models A \;/\; K(A) = T$

$\Leftrightarrow \forall K \;\; K(\neg A) = \bot \Leftrightarrow \forall K \;\; K \not\models A \Leftrightarrow$ kein $K \models A \Leftrightarrow \neg\varphi$ n.e.

$\boxed{IV}$ $\varphi_{1,2}$ gültig $\Leftrightarrow \neg\varphi_{1,2}$ n.e.

$\boxed{IS}$ $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ gültig $\Leftrightarrow \forall K \;\; K \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow \forall K \;\; K \models \varphi_1,\ K \models \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_{1,2}$ gültig $\overset{IV}{\Leftrightarrow} \neg\varphi_1, \neg\varphi_2$ n.e.

$\Leftrightarrow \nexists K \;\; K \models \neg\varphi_1,\ \nexists K \;\; K \models \neg\varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2$ n.e.

$\neg\varphi_1$ gültig $\Leftrightarrow \forall K \;\; K \not\models \varphi_1 \Leftrightarrow \nexists K \;\; K \models \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1$ n.e.

Blatt 3 - Aufgabe 1

$\phi, \psi ::= T \mid \bot \mid A \in \mathcal{A} \mid \varphi \wedge \psi$ $\quad$ $\exists A \;\; K(A) = \bot \;\; (A \in \mathcal{A})$, $\quad$ zz. $A \in \phi \Rightarrow K \not\models \varphi$

$\boxed{IA}$ $\bot, T$: $A \notin T/\bot$ ✓

$\varphi = A$, $A \in \mathcal{A}$, $A \in \varphi$, $K(A) = \bot \Rightarrow K \not\models A$

$\boxed{IV}$ $A \in \varphi_{1,2} \Rightarrow \not\models \varphi_{1,2}$

$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \to A \in \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow A \in \varphi_1$ oder $A \in \varphi_2 \Rightarrow K \not\models \varphi_1$ oder $K \not\models \varphi_2 \Rightarrow K \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$

$A \notin \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ✓

Blatt 4 - Aufgabe 1

a) $\neg A \to (A \to B)$

1		
2	$\neg A$	
3	A	
4	$\bot$	$(\bot I, 2, 3)$
5	B	$(\bot E, 4)$
6	$A \to B$	$(\to I, 3\text{-}5)$
7	$\neg A \to (A \to B)$	$(\to I, 2\text{-}6)$

b) $(A \to (B \wedge C)) \to (A \to B)$

1		
2	$A \to (B \wedge C)$	
3	A	
4	$B \wedge C$	$(\to E), 2, 3$
5	B	$(\wedge E_1), 4$
6	$A \to B$	$(\to I), 3\text{-}5$
7	$(A \to (B \wedge C)) \to (A \to B)$	$(\to I)\, 2, 6$

c) $(A \wedge (B \to \neg A)) \to (A \wedge \neg B)$ A

1	$A \wedge (B \to \neg A)$	
2	A	$(\wedge E_1, 1)$
3	$B \to \neg A$	$(\wedge E_2, 1)$
4	B	
5	$\neg A$	$(\to E), 3, 4$
6	$\bot$	$(\bot I), 2, 5$
7	$\neg B$	$(\neg I), 4\text{-}6$
8	$A \wedge \neg B$	$(\wedge I), 2, 7$

Übung 5 – Aufgabe ...

1 $\phi \to \chi$
2 $\neg\phi \to \chi$
3 $\neg(\phi \vee \neg\phi)$
4 ϕ
5 $\phi \vee \neg\phi$ $(\vee I_1, 4)$
6 $\bot$ $(\bot I, 3, 5)$
7 $\neg\phi$ $(\neg I, 4\text{-}6)$
8 $\phi \vee \neg\phi$ $(\vee I_2, 7)$
9 $\bot$ $(\bot I, 3, 8)$
10 $\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$ $(\neg I, 3\text{-}9)$
11 $\phi \vee \neg\phi$ $(\neg E, 10)$
12 χ $(\vee E, 1, 2, 11)$

c)

1 A
2 B
3 A
4 $B \to A$ $(\to I, 2, 3)$
5 $(B \to A) \vee (A \to B)$ $(\vee I_1, 4)$
6 $\neg A$
7 A
8 $\bot$ $(\bot I, 6, 7)$
9 B
10 $A \to B$ $(\to I, 7\text{-}9)$
11 $(B \to A) \vee (A \to B)$ $(\vee I_2, 10)$
12 $(B \to A) \vee (A \to B)$ $(\mathrm{FU}, 5, 11)$

$\boxed{\text{NNF}}$ $\varphi, \psi ::= A \mid \neg A \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \bot \mid \top \quad (A \in \mathcal{A})$

$NNF(\neg\neg\varphi) = NNF(\varphi)$
$NNF(\neg(\varphi \vee/\wedge \psi)) = NNF(\neg\varphi) \wedge/\vee NNF(\neg\psi)$
$NNF(\neg\bot) = \top, \quad NNF(\neg\top) = \bot$

$\boxed{\text{CNF}}$ $L ::= A \mid \neg A \quad (A \in \mathcal{A})$
$C ::= \bot \mid C' \quad C' ::= L \mid L \vee C'$
$\varphi ::= \top \mid \varphi' \quad \varphi' ::= C \mid C \wedge \varphi'$

$CNF(\varphi \wedge \psi) = CNF(\varphi) \wedge CNF(\psi)$
$CNF((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) = CNF(\varphi \vee \chi) \wedge CNF(\psi \vee \chi)$
$CNF(\varphi) = \varphi$ wenn $\varphi \in C$

Übung 6 – Aufgabe 1

DNF $L ::= A \mid \neg A \quad (A \in \mathcal{A})$
$C ::= \top \mid C' \quad C' ::= L \mid L \wedge C'$
$\varphi ::= \bot \mid \varphi' \quad \varphi' ::= C \mid C \vee \varphi'$

$DNF(\varphi \vee \psi) = DNF(\varphi) \vee DNF(\psi)$
$DNF((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) = DNF(\varphi \wedge \chi) \vee DNF(\psi \wedge \chi)$
$DNF(\varphi) = \varphi \quad \varphi \in C$

1. $DNF(\varphi)$ ist korrekt
2. $DNF(\varphi)$ ist wirklich DNF
3. $DNF(\varphi) = \varphi$

z.z. $DNF(\varphi) = \varphi$

IA: $\varphi = \bot$, $DNF(\bot) = \bot$; $\varphi = \top$, $DNF(\top) = \top$; $\varphi = A \mid \neg A$ $DNF((\neg) A) = (\neg) A$ ✓

IV: $DNF(\varphi_{1/2}) = \varphi_{1/2}$

IS: $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ $DNF(\varphi_1 \vee \varphi_2) = DNF(\varphi_1) \vee DNF(\varphi_2) = \varphi_1 \vee \varphi_2$

$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ $DNF(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \overset{\text{falls } \varphi_1, \varphi_2 \in C}{=} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ ✓

$\overset{\text{falls } \varphi_1 \in C}{\Longrightarrow}$ $\varphi_2 = \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \varphi = \varphi_1 \wedge (\psi_1 \vee \psi_2)$

$\Rightarrow DNF(\varphi_1 \wedge (\psi_1 \vee \psi_2)) = DNF(\varphi_1 \wedge \psi_1) \vee DNF(\varphi_1 \wedge \psi_2)$

$= \dots = (\varphi_1 \wedge \psi_1) \vee (\varphi_1 \wedge \psi_2) = \varphi_1 \wedge (\psi_1 \vee \psi_2) = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Übung 6 – Aufgabe 2

$\neg(A \to B) \wedge ((A \to (B \wedge C)) \to \neg C)$

NNF: $\neg(\neg A \vee B) \wedge (\neg(\neg A \vee (B \wedge C)) \vee \neg C) \Rightarrow (A \wedge \neg B) \wedge ((A \wedge \neg(B \wedge C)) \vee \neg C)$
$\Rightarrow A \wedge \neg B \wedge ((A \wedge (\neg B \vee \neg C)) \vee \neg C)$

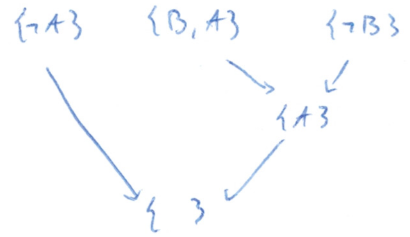
CNF $\Rightarrow A \wedge \neg B \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee \neg C)$

DNF $\Rightarrow (A \wedge \neg B) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee \neg C) \Rightarrow ((A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg B)) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg C)) \vee ((A \wedge \neg B) \wedge \neg C)$
$\Rightarrow (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

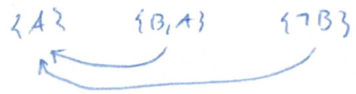
21

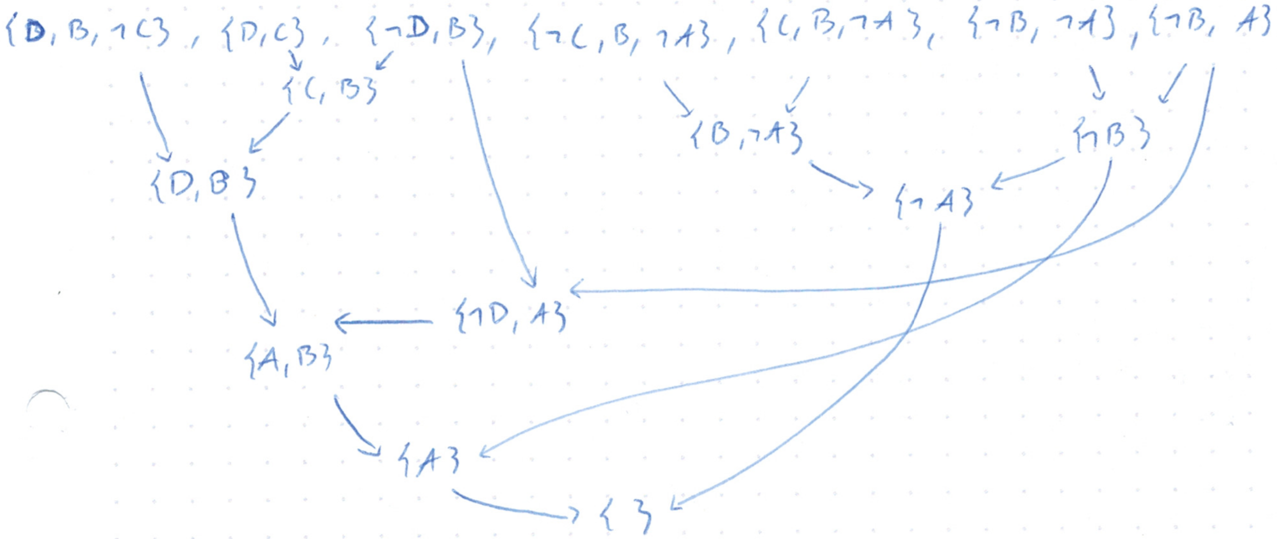
~~(...)~~ Übung 6 - Aufgabe 3

$(\neg A) \wedge (B \vee A) \wedge (\neg B)$



$A \wedge (B \vee A) \wedge \neg B$





Übung 7

PLE: $\varphi / A \Leftrightarrow \varphi$ st. $\neg A \notin C$ wenn $\neg A$ nicht in Klauselmenge, kann ich A annehmen

UP: $\varphi / A \Leftrightarrow \varphi$ st. $\{A\} \in \varphi$

Z PLE funktioniert:

Sei φ Klauselmenge. OBdA sei $\neg A \notin C \quad \forall \; C \in \varphi$

Z: $R(\varphi) \Leftrightarrow R(\varphi / A)$

Fall 1: φ erfüllbar

- Sei $K(A) = T$. Ersetze A in φ durch $T \Rightarrow \varphi \equiv \varphi / A \Rightarrow \varphi$ erfüllbar
- Sei $K(A) = \underline{\perp}$ und $K \models \varphi$

...

Z $R(\varphi / A) \Leftrightarrow R(A)$ st $\{A\} \in \varphi$

Sei φ eine Klauselmenge mit $\{A\} \in \varphi$

Z: φ erfüllbar $\Leftrightarrow \varphi / A$ erfüllbar

- φ erfüllbar
  $\Rightarrow$ Jede Klausel C erfüllbar $\overset{\{A\} \in \varphi}{\Rightarrow} K(A) = T \Rightarrow \varphi / A$ erfüllbar
- φ nicht erfüllbar
  $\Rightarrow$ es gibt kein K so dass $K \models \varphi$
  - $K(A) = T \Rightarrow K \not\models \varphi / A$
  - $K(A) = \perp \Rightarrow K(\neg A) = T$
- φ / A erfüllbar $\Rightarrow$ es gibt K mit $K \models \varphi / A$
  Sei $K' = K \cup \{A \to T\} \Rightarrow K' \models \varphi$

$\{D, B, \neg C\}$ $\{D, C\}$ $\{\neg D, B\}$ $\{\neg C, B, \neg A\}$ $\{C, B, \neg A\}$ $\{\neg B, \neg A\}$ $\{\neg B, A\}$

$\{\neg B\}$

1P $\Rightarrow$ $\{D, \neg C\}$ $\{D, C\}$ $\{\neg D\}$ $\{\neg C, \neg A\}$ $\{C, \neg A\}$

2LE $\Rightarrow$ $\{D, \neg C\}$ $\{D, C\}$ $\{\neg D\}$

$\{D\}$ $\{\}$

$\forall x. \exists x.$

$A \wedge B \wedge P(x) \wedge Q(f(y)) \wedge P(z)$

nicht freie Variablen, freie Variable, Funktion, Prädikat

Prädikat: Objekt $\to \{\top, \bot\}$

Funktion: Objekt $\to$ Objekt

Aufgabe 1 - Blatt 8

a) $x < y := \exists z\ ((x + z = y) \wedge \neg (z = 0))$ b)

$\exists z\ (x + s(z) = y)$

$isSqrt(x,y) := x \times x = y$

$x / y := \exists z\ (x \times s(z) = y)$

) $\forall x\ (\exists y.\ x \times x = y \to \exists z.\ x < z \wedge \exists a.\ z \times z = a) \wedge \forall x \exists y.\ x \times x = y$

) $\neg \exists x, y, z.\ (x \times x \times x \times x \times x) + (y \times y \times y \times y \times y) = (z \times z \times z \times z \times z) \wedge (0 < x) \wedge (0 < y) \wedge (0 < z)$

Aufgabe 2 - Blatt 8

$\forall x\ (P(x) \wedge \exists x\ P(y))) \wedge \exists y\ (Q(x)))$

$= FV(\forall x (P(x) \wedge \exists x (P(y)))) \cup FV(\exists y (Q(x)))$

$= FV(P(x) \wedge \exists x (P(y))) \setminus \{x\} \cup FV(Q(x)) \setminus \{y\}$

$= (FV(P(x)) \cup FV(\exists x (P(y)))) \setminus \{x\} \cup FV(x) \setminus \{y\}$

$= (FV(x) \cup FV(P(y)) \setminus \{x\}) \setminus \{x\} \cup \{x\}$

$= (\{x\} \cup FV(y) \cancel{\setminus \{x\}}) \setminus \{x\} \cup \{x\} = (\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x\} \cup \{x\} = \{x, y\}$

Aufgabe 3 - Blatt 8

$(\exists x.\ x = y \wedge P(z))\sigma$, $[f(a)/z, b/y] := \sigma$

gebundene Var. werden nicht substituiert

$= \exists x.\ x = b \wedge P(f(a))$

$(\forall x.\ y = x)[a/y]$

$\forall z.\ (y = x)[a/y, z/x] := \sigma$

$\forall z.\ y\sigma = x\sigma$

$\forall z.\ a = z$

$\forall x\ (R(x,y) \wedge Q(y))\ [c/x, f(x,y)/y, c/z] := \sigma$

$\forall x\ (R(x,y))\sigma \wedge Q(y)\sigma$

$\forall a\ (R(x,y))\underbrace{\sigma \cup \{a/x\} \setminus \{c/x\}}_{\sigma'} \wedge Q(y\sigma)$

$\forall a\ (R(x\sigma', y\sigma')) \wedge Q(f(x,y))$

$= \forall a\ (R(a, f(x,y)) \wedge Q(f(x,y))$

31

GLOIN Glay

(=I) $\dfrac{}{E=E}$ (=E) $\dfrac{E=D \quad \phi[E/x]}{\phi[D/x]}$

(∀I) $\dfrac{\boxed{c} \;\vdots\; \phi[c/x]}{\forall x(\phi)}$ (∀E) $\dfrac{\forall x(\phi)}{\phi[E/x]}$ (∃I) $\dfrac{\phi[E/x]}{\exists x(\phi)}$ (∃E) $\dfrac{\exists x\phi \quad \boxed{E}\;\phi[E/x] \;\vdots\; \psi}{\psi}$

Blatt 9

Aufgabe 1

1. $\exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y\,(T(y)))$

2.

1	$\forall y\,(T(y))$	
2	$T(x)$	
3	$\forall y\,(T(y))$	(1)
4	$T(x) \rightarrow \forall y(T(y))$	(2, 3, →I)
5	$\exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y(T(y)))$	(4, ∃I)
6	$\neg \forall y\,(T(y))$	
7	$\neg \exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y(T(y)))$	
8	$\boxed{c}$	
9	$\neg T(c)$	
10	$T(c)$	
11	$\bot$	(⊥I, 9, 10)
12	$\forall y\,(T(y))$	(⊥E, 11)
13	$T(c) \rightarrow \forall y(T(y))$	(→I, 10-12)
14	$\exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y\,(T(y)))$	(∃I, 13)
15	$\bot$	(⊥I, 14, 7)
16	$\neg\neg T(c)$	(¬I, 9-15)
17	$T(c)$	(¬E, 16)
18	$\forall y\,(T(y))$	(∀I, 8-17)
19	$\bot$	(⊥I, 6, 18)
20	$\neg\neg \exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y(T(y)))$	(¬I, 7-19)
21	$\exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y\,(T(y)))$	(¬E, 20)
22	$\exists x\,(T(x) \rightarrow \forall y\,(T(y)))$	(FU, 1-21)

Aufgabe 2

1	$\forall x\ (i(x) * x = e)$
2	$\forall x (e * x = x)$
3	$\forall x,y,z\ ((x*y)*z = x*(y*z))$

4	$\boxed{c}$	
5	$c * i(c) = c * i(c)$	$(=I)$
6	$e * c = c$	$(\forall E, 2)$
7	$c * i(c) = (e*c) * i(c)$	$(=E, 5, 6)$
8	$i(i(c)) * i(c) = e$	$(\forall E, 2)$
9	$c * i(c) = ((i(i(c)) * i(c)) * c) * i(c)$	$(=E, 7, 8)$
10	$(i(i(c)) * i(c)) * c = i(i(c)) * (i(c) * e)$	$(\forall E^3, 3)$
11	$c * i(c) = (i(i(c)) * (i(c) * c)) * i(c)$	$(=E, 9, 10)$
12	$i(c) * c = e$	$(\forall E, 1)$
13	$c * i(c) = (i(i(c)) * e) * i(c)$	$(=E, 11, 12)$
14	$(i(i(c)) * e) * i(c) = i(i(c)) * (e * i(c))$	$(\forall E, 3)$
15	$c * i(c) = i(i(c)) * (e * i(c))$	$(=E, 13, 14)$
16	$e * i(c) = i(c)$	$(\forall E, 2)$
17	$c * i(c) = i(i(c)) * i(c)$	$(=E, 15, 16)$
18	$c * i(c) = e$	$(=E, 8, 17)$
19	$\forall x\ (x * i(x)) = e$	

Blatt 10

Unifikation

$S \cup \{x \doteq x\} \Rightarrow S$ — delete

$S \cup \{f(E_1,\dots,E_n) \doteq f(D_1,\dots,D_n)\} \to S \cup \{E_1 \doteq D_1, \dots, E_n \doteq D_n\}$ — decomp

$S \cup \{f(E_1,\dots,E_n) \doteq g(D_1,\dots,D_m)\} \to \bot$ — conflict

$S \cup \{E \doteq x\} \to S \cup \{x \doteq E\}$, $E \notin Var$ — orient

$S \cup \{x \doteq E\} \to \begin{cases} \bot & x \in FV(E),\ x \neq E \\ S[E/x] \cup \{x \doteq E\} & x \in FV(S),\ x \notin FV(E) \end{cases}$ — elim

11

$\{(x+0)+(y+0) \doteq x + s(x)\} \xrightarrow{decomp} \{x+0 \doteq x,\ y+0 \doteq s(x)\} \xrightarrow{orient} \{x \doteq x+0,\ y+0 \doteq s(x)\} \xrightarrow{elim} \bot$

$\{x+s(y) \doteq 0 + s(s(x))\} \xrightarrow{decomp} \{x \doteq 0, s(y) \doteq s(s(x))\} \xrightarrow{decomp} \{x \doteq 0, y \doteq s(x)\} \xrightarrow{elim} \{y \doteq s(0), x \doteq 0\}$

12 $E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$

IA: $E = x$

$E = x$ $\quad x(\sigma\tau) = \sigma\tau(x) = \sigma(x)\tau = (x\sigma)\tau$ ✓

IS: $E = f(E_1,\dots,E_n)$

$f(E_1,\dots,E_n)(\sigma\tau) = f(E_1(\sigma\tau),\dots,E_n(\sigma\tau)) \overset{IV}{=} f((E_1\sigma)\tau,\dots,(E_n\sigma)\tau)$

$\varphi \lor \exists x(\psi) \equiv \exists x(\varphi \lor \psi)$
$\varphi \land \forall x(\psi) \equiv \forall x(\varphi \land \psi)$
$\varphi \lor \forall x(\psi) \equiv \forall x(\varphi \lor \psi)$

Aufgabe 3

$\neg(\exists x\,(P(x) \land \forall y\,(D(y) \to L(x,y))) \land \forall x\,(P(x) \to \forall y\,(Q(y) \to \neg L(x,y)))$
$\quad \to \forall x\,(D(x) \to \neg Q(x)))$

$= \exists x\,(P(x) \land \forall y\,(D(y) \to L(x,y))) \land \forall x\,(P(x) \to \forall y\,(Q(y) \to \neg L(x,y))) \land \neg\forall x\,(D(x) \to \neg Q(x$

$= \exists x\,(P(x) \land \forall y\,(\neg D(y) \lor L(x,y))) \land \forall x\,(\neg P(x) \lor \forall y\,(\neg Q(y) \lor \neg L(x,y))) \land \neg\forall x\,(\neg D(x) \lor \neg Q(x))$

$= \exists x_1((P(x_1) \land \forall y\,(\neg D(y) \lor L(x_1,y))) \land \forall x\,(\neg P(x) \lor \forall y\,(\neg Q(y) \lor \neg L(x,y))) \land \exists x\,(D(x) \land Q(x)))$

$= \exists x_1 \exists x_3((P(x_1) \land \forall y\,(\neg D(y) \lor L(x_1,y))) \land \forall x\,(\neg P(x) \lor \forall y\,(\neg Q(y) \lor \neg L(x,y))) \land (D(x_3) \land Q(x_3)))$

$= \exists x_1 \exists x_3 \forall x_2((P(x_1) \land \forall y\,(\neg D(y) \land L(x_1,y))) \land (\neg P(x_2) \lor \forall y\,(\neg Q(y) \lor \neg L(x_2,y))) \land (D(x_3) \land Q(x_3)))$

$= \exists x_1 \exists x_3 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2((P(x_1) \land (\neg D(y_1) \land L(x_1,y_1))) \land (\neg P(x_2) \lor (\neg Q(y_2) \lor \neg L(x_2,y_2))) \land (D(x_3) \land Q(x_3)))$

$\boxed{\forall x \exists y.\ x + \underset{f(x)}{y} = 0}$

Skolem: $\forall x_2 \forall y_1 \forall y_2((P(a) \land (\neg D(y_1) \lor L(a,y_1))) \land (\neg P(x_2) \lor \neg(Q(y_2) \lor \neg L(x_2,y_2))) \land (D(b) \land Q(b)))$

Resolution!!! $\{P(a)\}$ $\{\neg D(y_1), L(a,y_1)\}$ $\{\neg P(x_2), \neg Q(y_2), \neg L(x_2,y_2)\}$ $\{D(b)\}$ $\{Q(b)\}$

$\{L(a,b)\}$ weil b Konstante!

$\{\neg P(a), \neg Q(b)\}$

$\{\neg Q(b)\}$ $\{\}$

Blatt 11

A1 $\mathbb{N}[\![0]\!] = 0$, $\mathbb{N}[\![s(x)]\!] = x+1$, $\mathbb{N}[\![x+y]\!] = x+y$, $\mathbb{N}[\![x \times y]\!] = x \cdot y$

a)
$PA_4: \mathbb{N} \models \forall x,y.\ x + s(y) = s(x+y)$
$\Leftrightarrow \mathbb{N}, [n/x, m/y] \models x + s(y) = s(x+y)$
$\Leftrightarrow \mathbb{N}[\![x + s(y)]\!]\sigma = \mathbb{N}[\![s(x+y)]\!]\sigma$
$\Leftrightarrow \mathbb{N}[\![x]\!]\sigma + \mathbb{N}[\![s(y)]\!]\sigma = \mathbb{N}[\![x+y]\!]\sigma + 1$
$\Leftrightarrow n + (\mathbb{N}[\![y]\!]\sigma + 1) = (\mathbb{N}[\![x]\!]\sigma + \mathbb{N}[\![y]\!]\sigma) + 1$
$\Leftrightarrow n + (m + 1) = (n + m) + 1$

$PA_6: \mathbb{N} \models \forall x,y.\ (x \times (s(y)) = x \times y + x)$
$\Leftrightarrow \mathbb{N}, [n/x, m/y] \models x \times s(y) = (x \times y) + x$
$\Leftrightarrow \mathbb{N}[\![x \times s(y)]\!]\sigma = \mathbb{N}[\![(x \times y) + x]\!]\sigma$
$\Leftrightarrow \mathbb{N}[\![x]\!]\sigma \times \mathbb{N}[\![s(y)]\!]\sigma = \mathbb{N}[\![x \times y]\!]\sigma + \mathbb{N}[\![x]\!]\sigma$
$\Leftrightarrow n \times (\mathbb{N}[\![y]\!]\sigma + 1) = (\mathbb{N}[\![x]\!]\sigma \times \mathbb{N}[\![y]\!]\sigma) + n$
$\Leftrightarrow n \times (m + 1) = (n \cdot m) + n$ D.

Anfgabe 2

$\mathbb{R}^+ \models \neg(x + x = s(0))$

IA: $\mathbb{R}^+ \models \neg(0+0 = s(0))$

IS: $\mathbb{R}^+ \models \neg(x+x = s(0))$

$\forall x\, (\neg(x+x = s(0)) \to \neg(s(x)+s(x) = s(0))$

$(r+1) + (r+1) = 2r+2 > 1$

ABER $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = s(0)$ ↯

A1 - b)

$\mathbb{N} \models \forall x,y\,(x+y=0 \to (x=0 \land y=0))$

$\Rightarrow \mathbb{N}, [\underbrace{n/x, m/y}_{\sigma}] \models \neg(x+y=0) \lor (x=0 \land y=0)$

$(\mathbb{N}[\![\neg(x+y)=0)]\!]\sigma \lor \mathbb{N}[\![(x=0 \land y=0)]\!]\sigma)$

$\Rightarrow \mathbb{N}, \sigma \models \neg(x+y=0) \lor (\mathbb{N}, \sigma \models x=0 \land \mathbb{N}, \sigma \models y=0)$

$\Rightarrow \mathbb{N}, \sigma \not\models (x+y=0) \lor (\mathbb{N}, \sigma \models x=0 \land \mathbb{N}, \sigma \models y=0$

$\Leftrightarrow \mathbb{N}[\![x+y]\!]\sigma \neq \mathbb{N}[\![0]\!]\sigma \lor (\mathbb{N}[\![x]\!]\sigma = \mathbb{N}[\![0]\!]\sigma \land \mathbb{N}[\![y]\!]\sigma = \mathbb{N}[\![0]\!]\sigma)$

$\Leftrightarrow \mathbb{N}[\![x]\!]\sigma + \mathbb{N}[\![y]\!]\sigma \neq 0 \lor (n=0 \land m=0)$

$\Leftrightarrow n+m \neq 0 \lor (n=0 \land m=0)$ FU → done

Übung 09 - 4da

0.1 $\forall x,y\,(R(x,y) \to R(y,x))$

0.2 $\forall x,y,z\,(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$

$\boxed{c}\ \boxed{d}\ \boxed{e}$

$R(c,d) \land R(c,e)$

$R(c,d)$

$R(c,e)$

$R(c,d) \to R(d,c)$

$R(d,c)$

$R(d,c) \land R(c,e)$

$R(d,c) \land R(c,e) \to R(d,e)$

$R(d,e)$

$R(c,d) \land R(c,e) \to R(d,e)$

$\forall x,y,z\,(R(x,y)$

1 $\boxed{n}$

2 $\boxed{m}$

3 $n+m = s(0)$

4 $n = 0$

5 $n=0 \lor m=0$ $(\lor I_1, 4)$

6 $\neg(n=0)$

7 $m=0$

8 $n=0 \lor m=0$ $\lor I_1, 7$

9 $\neg(m=0)$

10

Blatt 12 $\boxed{c}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\models \forall x, y\ (x+y = s(0) \to (x=0 \lor y=0))$

$\Leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\models n+m = s(0) \land \neg(n=0 \lor m=0)$

$\Leftrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}[\![n+m]\!] = \mathbb{N}\times\mathbb{N}[\![s(0)]\!] \land \mathbb{N}\times\mathbb{N} \not\models n=0 \lor m=0$

$\Leftrightarrow n+m=1 \land n \neq 0 \land m \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} n_1+m_1 = 1 \\ n_2+m_2 = 1 \end{matrix} \land \begin{matrix} m_1 \neq 0 \\ m_2 \neq 0 \end{matrix} \land \begin{matrix} n_1 \neq 0 \\ n_2 \neq 0 \end{matrix}$

1 $\neg(n=0)$

$\forall \ell\ (\neg(s(\ell)=n))$

$\neg(s(f)=n)$

$\neg(0=s(f))$

Quod Erat Demonstrandum e.V.
z.Hd. Luise Puhlmann
Teutonenstraße 35
90402 Nürnberg

www.qed-verein.de

Einverständniserklärung

Meine Tochter/~~Mein Sohn~~ Madeleine Bauer darf an der Veranstaltung des Vereins Quod Erat Demonstrandum e.V. vom 08.07.2016 bis zum 11.07.2016 in Saldenburg teilnehmen.

Hiermit entbinde ich, Raimund Bauer, den Vorstand des Quod Erat Demonstrandum e.V. und die Organisatoren der Veranstaltung von der Aufsichtpflicht.

Die Handynummer meiner Tochter/~~meines Sohnes~~ ist 01753534181.

Im Notfall bin ich unter 016016022210 oder 01703604935 erreichbar.

Unserer Tochter/~~unserem Sohn~~ ist es erlaubt/~~nicht erlaubt~~ auf eigene Verantwortung und ohne Aufsicht in einem Weiher baden zu gehen. (nicht zutreffendes streichen) Wir haben zur Kenntnis genommen, dass keine Rettungsschwimmer anwesend sind. Wir bestätigen, dass unsere Tochter/~~unser Sohn~~ Schwimmen kann. (ggf. Streichen)

Wir sind damit einverstandenen (ggf. streichen), dass Fotos und Aufnahmen meiner Tochter/~~meines Sohnes~~, die im Rahmen dieser Veranstaltung entstehen, in eine QED-interne, passwortgeschützte Fotogalerie hochgeladen werden. Wir sind ferner damit einverstanden (ggf. streichen), dass ausgewählte Fotos zur Dokumenation der Veranstaltung auf unserer Website veröffentlicht werden.
Einzelne Bilder können jederzeit auf gesonderten Wunsch davon ausgenommen werden.

Parkstetten, den 06.07.2016 — Dr. Raimund Bauer

(Ort, Datum) (Unterschrift eines Erziehungsberechtigten)

Aufgabe 6 Variablensubstitution (10 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}
&(\phi \vee \psi)\sigma\\
&= (\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi))\sigma\\
&= \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\sigma\\
&= \neg((\neg\phi)\sigma \wedge (\neg\psi)\sigma)\\
&= \neg((\neg\phi\sigma) \wedge (\neg\psi\sigma))\\
&= \phi\sigma \vee \psi\sigma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\exists x\,(\phi))\sigma\\
&= (\neg\forall x\,(\neg\phi))\sigma\\
&= \neg(\forall x\,(\neg\phi))\sigma\\
&= \neg\forall y\,((\neg\phi)\sigma')\\
&= \neg\forall y\,(\neg(\phi\sigma'))\\
&= \exists y\,(\phi\sigma'),
\end{aligned}$$

wobei σ' und y die Bedingungen aus der Definition der Substitution (wie in Aufgabe 3 angegeben) erfüllen.

(b) 1. Wir haben

$$\begin{aligned}
(\exists z\,(\mathsf{R}(x,y)) \wedge \mathsf{Q}(z,y))\sigma &= (\exists z\,(\mathsf{R}(x,y)))\sigma \wedge (\mathsf{Q}(z,y))\sigma\\
&= \exists y\,(\mathsf{R}(x,y)\sigma') \wedge \mathsf{Q}(c, f(x,z))\\
&= \exists y\,(\mathsf{R}(c, f(x,z))) \wedge \mathsf{Q}(c, f(x,z))
\end{aligned}$$

wobei $\sigma = [c/x, f(x,z)/y, c/z]$ und $\sigma' = [c/x, f(x,z)/y, y/z]$; wir können hier als 'neuen' Variablennamen für z tatsächlich y wählen, da für alle $w \in FV(\exists z\,(\mathsf{R}(x,y))) = \{x,y\}$ gilt, dass $y \notin FV(\sigma(w))$: Für $w = x$ haben wir $y \notin FV(\sigma(x)) = FV(c) = \emptyset$ und für $w = y$ haben wir $y \notin FV(\sigma(y)) = FV(f(x,z)) = \{x,z\}$.

2. Wir haben

$$\begin{aligned}
(\exists x\,(\mathsf{P}(z,x)) \wedge \forall y\,(\mathsf{R}(y,z) \vee \exists z\,(\top)))\sigma &= (\exists x\,(\mathsf{P}(z,x)))\sigma \wedge (\forall y\,(\mathsf{R}(y,z) \vee \exists z\,(\top)))\sigma\\
&= \exists y\,(\mathsf{P}(z,x)\sigma') \wedge \forall y\,((\mathsf{R}(y,z) \vee \exists z\,(\top))\sigma'')\\
&= \exists y\,(\mathsf{P}(f(f(x,x),z),y)) \wedge \forall y\,(\mathsf{R}(y,z)\sigma'' \vee (\exists z\,(\top))\sigma'')\\
&= \exists y\,(\mathsf{P}(f(f(x,x),z),y)) \wedge \forall y\,(\mathsf{R}(y, f(f(x,x),z)) \vee \exists y\,((\top)\sigma'''))\\
&= \exists y\,(\mathsf{P}(f(f(x,x),z),y)) \wedge \forall y\,(\mathsf{R}(y, f(f(x,x),z)) \vee \exists y\,(\top))
\end{aligned}$$

wobei $\sigma = [f(x,y)/x, x/y, f(f(x,x),z)/z]$ und $\sigma' = [y/x, x/y, f(f(x,x),z)/z]$ sowie $\sigma'' = [f(x,y)/x, y/y, f(f(x,x),z)/z]$ und $\sigma''' = [f(x,y)/x, y/y, y/z]$; wir können hier jeweils y als 'neuen' Variablennamen wählen, da x die einzige Variable mit $y \in FV(\sigma(x))$ ist und x ausserhalb von $\mathsf{P}(z,x)$ nur gebunden vorkommt.

(c) Als y nehmen wir $\sigma(x)$. Es müssen dann noch die Bedingungen aus der Definition der Substitution überprüft werden: Zunächst haben wir per Definition $\sigma'(x) = \sigma(x) = y$; für $z \neq x$ haben wir ausserdem $\sigma'(z) = \sigma(z)$; es bleibt zu zeigen, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x\,(\phi))$. Da σ eine Variablenpermutation und also injektiv ist, ist x die einzige Variable mit $\sigma(x) = y$ und also die einzige Variable mit $y \in FV(\sigma(x))$. Allerdings haben wir $x \notin FV(\forall x(\phi))$; die Anforderung an y ist also ebenfalls erfüllt.

Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2017

Übungsblatt 8

Musterlösung*

Aufgabe 1 Peano-Arithmetik (Präsenzaufgabe)

(a) $x < y \equiv \exists z\,(x+s(z)=y)$, $\mathsf{isSqrt}(x,y) \equiv (x \times x = y)$, $x \mid y \equiv \neg(x=0) \wedge \exists z\,(y = x \times z)$.

(b) $\forall x\,(\exists y\,((x<y) \wedge \exists z\,(\mathsf{isSqrt}(z,y))))$

(c) $\neg(\exists x,y,z\,((0<x) \wedge (0<y) \wedge (0<z) \wedge \mathsf{isExp5}(x) \wedge \mathsf{isExp5}(y) \wedge \mathsf{isExp5}(z) \wedge x+y=z))$ wobei $\mathsf{isExp5}(x) \equiv \exists y\,(x = y \times y \times y \times y \times y)$.

Aufgabe 2 Freie Variablen (Präsenzaufgabe)

$$\begin{aligned}
&FV(\forall x\,(\mathsf{P}(x) \wedge \exists x\,(\mathsf{P}(y))) \wedge \exists y\,(\mathsf{Q}(x)))\\
&= FV(\forall x\,(\mathsf{P}(x) \wedge \exists x\,(\mathsf{P}(y)))) \cup FV(\exists y\,(\mathsf{Q}(x)))\\
&= (FV(\mathsf{P}(x) \wedge \exists x\,(\mathsf{P}(y))) \setminus \{x\}) \cup (FV(\mathsf{Q}(x)) \setminus \{y\})\\
&= ((FV(\mathsf{P}(x)) \cup FV(\exists x\,(\mathsf{P}(y)))) \setminus \{x\}) \cup (\{x\} \setminus \{y\})\\
&= ((\{x\} \cup (FV(\mathsf{P}(y)) \setminus \{x\})) \setminus \{x\}) \setminus \{x\}) \cup \{x\}\\
&= ((\{x\} \cup (\{y\} \setminus \{x\})) \setminus \{x\}) \cup \{x\}\\
&= \{y\} \cup \{x\} = \{x,y\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Variablensubstitution (Präsenzaufgabe)

$$\begin{aligned}
&(\forall x\,(\mathsf{R}(x,y)) \wedge \mathsf{Q}(y))\sigma\\
&= (\forall x\,(\mathsf{R}(x,y)))\sigma \wedge (\mathsf{Q}(y))\sigma\\
&= (\forall z\,(\mathsf{R}(x,y))\sigma') \wedge \mathsf{Q}(f(x,y))\\
&= (\forall z\,(\mathsf{R}(z,f(x,y)))) \wedge \mathsf{Q}(f(x,y)),
\end{aligned}$$

wobei $\sigma = [c/x, f(x,y)/y, c/z]$ und $\sigma' = [z/x, f(x,y)/y, c/z]$; wir haben $FV(\forall x(\mathsf{R}(x,y))) = \{x,y\}$ und beobachten, dass im zweiten Umformungsschritt $z \notin FV(\sigma(x)) = FV(c) = \emptyset$ und $z \notin FV(\sigma(y)) = FV(f(x,y)) = \{x,y\}$, sodass wir z tatsächlich als neuen Variablennamen wählen dürfen.

*Eventuell gefundene Fehler bitte an `sergey.goncharov@fau.de` melden

Aufgabe 4 Tetraederzahlen in Peano-Arithmetik (6 Punkte)

(a) Um es bei Teilaufgabe b) etwas leichter zu haben, definieren zunächst eine binäre Relation Tetraederzahl, die ein Paar (n,m) genau dann enthält, wenn n die m-te Tetraederzahl ist:

$$\mathsf{Tetraederzahl}(n,m) \equiv (n+n+n+n+n+n = m \times (m+1) \times (m+2));$$

hierbei drücken wir $6n$ durch den Term $n{+}n{+}n{+}n{+}n{+}n$ aus, da die Konstante 6 zunächst nicht definiert ist (wir könnten auch den äquivalenten Term $n \times s(s(s(s(s(s(0))))))$ verwenden). Nun definieren wir ein Prädikat, das alle Tetraederzahlen enthält:

$$\mathsf{istTetraederzahl}(n) \equiv \exists m(\mathsf{Tetraederzahl}(n,m))$$

(b) Für alle Zahlen x und y mit $x = y+1$ und alle Zahlen v und w, sodass v die x-te Tetraederzahl und w die y-te Tetraederzahl ist, ist v oder w durch 4 teilbar:

$$\forall x,y,v,w\,(((x = s(y)) \wedge \mathsf{Tetraederzahl}(v,x) \wedge \mathsf{Tetraederzahl}(w,y)) \to ((4 \mid v) \vee (4 \mid w)))$$

(c) Wir definieren ein Hilfsprädikat KT, das alle Zahlen enthält, die gleichzeitig Kubikzahl und Tetraederzahl sind:

$$\mathsf{KT}(n) \equiv \mathsf{istTetraederzahl}(n) \wedge \exists m\,(n = m \times m \times m)$$

Nun können wir die Existenz von unendlich vielen solchen Zahlen wie folgt ausdrücken:

$$\forall x\,(\exists y\,((x<y) \wedge \mathsf{KT}(y)));$$

in Worten: Für jede Zahl x gibt es eine echt grössere Zahl y, die in KT enthalten ist. Damit lässt sich dann für jede Tetraederzahl die Existenz einer echt größeren Tetraederzahl herleiten.

Aufgabe 5 Freie Variablen (4 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}
FV(\forall x\,(\forall y\,(\mathsf{P}(x) \to \forall x\,(\mathsf{P}(y)))) \wedge \exists y\,(\mathsf{Q}(x))) &= FV(\forall x\,(\forall y\,(\mathsf{P}(x) \to \forall x\,(\mathsf{P}(y))))) \cup FV(\exists y\,(\mathsf{Q}(x)))\\
&= (FV(\forall y\,(\mathsf{P}(x) \to \forall x\,(\mathsf{P}(y)))) \setminus \{x\}) \cup (FV(\mathsf{Q}(x)) \setminus \{y\})\\
&= (FV(\mathsf{P}(x) \to \forall x\,(\mathsf{P}(y))) \setminus \{x,y\}) \cup (\{x\} \setminus \{y\})\\
&= ((FV(\mathsf{P}(x)) \cup FV(\forall x\,(\mathsf{P}(y)))) \setminus \{x,y\}) \cup \{x\}\\
&= ((\{x\} \cup (FV(\mathsf{P}(y)) \setminus \{x\})) \setminus \{x,y\}) \cup \{x\}\\
&= ((\{x\} \cup (\{y\} \setminus \{x\})) \setminus \{x,y\}) \cup \{x\}\\
&= ((\{x\} \cup \{y\}) \setminus \{x,y\}) \cup \{x\} = \{x\}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
FV((\mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}) \vee \exists x\,(\forall x\,(\mathsf{P}(x) \vee \forall y\,(\mathsf{S}(y,z))))) &= FV(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}) \cup FV(\exists x\,(\forall x\,(\mathsf{P}(x) \vee \forall y\,(\mathsf{S}(y,z)))))\\
&= (FV(\mathsf{P}(x)) \cup FV(\mathsf{R})) \cup (FV(\forall x\,(\mathsf{P}(x) \vee \forall y\,(\mathsf{S}(y,z)))) \setminus \{x\})\\
&= (\{x\} \cup \emptyset) \cup (FV(\mathsf{P}(x) \vee \forall y\,(\mathsf{S}(y,z))) \setminus \{x\})\\
&= \{x\} \cup ((FV(\mathsf{P}(x)) \cup FV(\forall y\,(\mathsf{S}(y,z)))) \setminus \{x\})\\
&= \{x\} \cup ((\{x\} \cup (FV(\mathsf{S}(y,z) \setminus \{y\}))) \setminus \{x\})\\
&= \{x\} \cup ((\{x\} \cup (\{y,z\} \setminus \{y\})) \setminus \{x\})\\
&= \{x\} \cup ((\{x\} \cup \{z\}) \setminus \{x\}) = \{x,z\}
\end{aligned}$$

angeben. Als logische Grundlage dient die Prädikatenlogik der ersten Stufe mit Identität und dem undefinierten Elementprädikat $\in$.

1. *Extensionalitätsaxiom:* Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

$$\forall A, B\colon (A = B \iff \forall C\colon (C \in A \iff C \in B))$$

Das Axiom impliziert, dass es in ZF nur Entitäten mit Extension gibt, die üblicherweise als Mengen bezeichnet werden. Alle gebundenen Variablen beziehen sich daher in der ZF-Sprache automatisch auf Mengen.

2. *Leermengenaxiom*, veraltet *Nullmengenaxiom:* Es gibt eine Menge ohne Elemente.

$$\exists B\colon \forall A\colon \neg(A \in B)$$

Aus dem Extensionalitätsaxiom folgt unmittelbar die Eindeutigkeit dieser Menge B, das heißt, dass es auch nicht mehr als eine solche Menge gibt. Diese wird meist als $\emptyset$ geschrieben und leere Menge genannt. Das bedeutet: Die leere Menge ist in ZF das einzige Urelement.

3. *Paarmengenaxiom:* Für alle A und B gibt es eine Menge C, die genau A und B als Elemente hat.

$$\forall A, B\colon \exists C\colon \forall D\colon (D \in C \iff (D = A \vee D = B))$$

Offenbar ist auch diese Menge C eindeutig bestimmt. Sie wird geschrieben als $\{A, B\}$. Die Menge $\{A, A\}$ wird üblicherweise als $\{A\}$ geschrieben.

4. *Vereinigungsaxiom:* Für jede Menge A gibt es eine Menge B, die genau die Elemente der Elemente von A als Elemente enthält.

$$\forall A\colon \exists B\colon \forall C\colon (C \in B \iff \exists D\colon (D \in A \wedge C \in D))$$

Auch die Menge B ist eindeutig bestimmt und heißt die *Vereinigung* der Elemente von A, geschrieben als $\bigcup A$. Zusammen mit dem Paarmengenaxiom lässt sich die *Vereinigung* $A \cup B := \bigcup\{A, B\}$ definieren.

5. *Unendlichkeitsaxiom:* Es gibt eine Menge A, die die leere Menge und mit jedem Element x auch die Menge $x \cup \{x\}$ enthält (vgl. *Induktive Menge*).

$$\exists A\colon (\exists X \in A\colon \forall Y\colon \neg(Y \in X) \wedge \forall X\colon (X \in A \Rightarrow X \cup \{X\} \in A))$$

Es gibt viele derartige Mengen. Der Schnitt aller dieser Mengen ist die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften und bildet die *Menge der natürlichen Zahlen*; die Bildung der Schnittmenge erfolgt durch Anwendung des Aussonderungsaxioms (s. u.). Die natürlichen Zahlen werden also dargestellt durch

$$\mathbb{N} := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$$

6. *Potenzmengenaxiom:* Für jede Menge A gibt es eine Menge P, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind.

$$\forall A\colon \exists P\colon \forall B\colon (B \in P \iff \forall C\colon (C \in B \Rightarrow C \in A))$$

Die Menge P ist eindeutig bestimmt. Sie heißt die Potenzmenge von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

7. *Fundierungsaxiom* oder *Regularitätsaxiom:* Jede nichtleere Menge A enthält ein Element B, so dass A und B disjunkt sind.

$$\forall A\colon (A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B\colon (B \in A \wedge \neg\exists C\colon (C \in A \wedge C \in B)))$$

Das Element B, welches zu A disjunkt ist, ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.
Das Fundierungsaxiom verhindert, dass es unendliche oder zyklische Folgen von Mengen gibt, bei denen jeweils eine in der vorangegangenen enthalten ist, $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$, denn dann könnte man eine Menge $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ bilden, die dem Axiom widerspricht: Für jedes $x_i \in A$ ist $x_{i+1} \in x_i \cap A$, die beiden Mengen sind also nicht disjunkt. Das impliziert, dass eine Menge sich nicht selbst als Element enthalten kann.

8. *Aussonderungsaxiom:* Hier handelt es sich um ein Axiomenschema mit je einem Axiom zu jedem Prädikat P: Zu jeder Menge A existiert eine Teilmenge B von A, die genau die Elemente C von A enthält, für die $P(C)$ wahr ist.

Für jedes einstellige Prädikat $P(C)$, in dem die Variable B nicht vorkommt, gilt:

$$\forall A\colon \exists B\colon \forall C\colon (C \in B \iff C \in A \wedge P(C))$$

Aus dem Extensionalitätsaxiom ergibt sich sofort, dass es genau eine solche Menge gibt. Diese wird mit $\{C \in A | P(C)\}$ notiert.

9. *Ersetzungsaxiom* (Fraenkel): Ist A eine Menge und wird jedes Element von A eindeutig durch eine beliebige Menge ersetzt, so geht A in eine Menge über.[3] Die Ersetzung wird präzisiert durch zweistellige Prädikate mit ähnlichen Eigenschaften wie eine Funktion, und zwar als Axiomenschema für jedes solche Prädikat:

Für jedes Prädikat $F(X, Y)$, in dem die Variable B nicht vorkommt gilt:

$$\forall X, Y, Z\colon (F(X, Y) \wedge F(X, Z) \Rightarrow Y = Z) \Rightarrow \forall A\colon \exists B\colon \forall C\colon (C \in B \iff \exists D\colon (D \in A \wedge F(D, C)))$$

Die Menge B ist eindeutig bestimmt und wird als $\{Y | D \in A \wedge F(D, Y)\}$ notiert.

In der Mathematik wird häufig auch das Auswahlaxiom benutzt, das ZF zu ZFC erweitert:

10. *Auswahlaxiom:* Ist A eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element von A enthält. Dieses Axiom hat eine komplizierte Formel, die mit dem Eindeutigkeitsquantor $\exists!$ etwas vereinfacht werden kann:

$$\forall A\colon \Big(((\emptyset \notin A) \wedge \forall X, Y, Z\colon ((X \in A \wedge Y \in A \wedge Z \in X \wedge Z \in Y) \Rightarrow (X = Y))) \\ \Rightarrow \\ \exists B\colon \forall X\colon (X \in A \Rightarrow \exists!\, Y\colon (Y \in X \wedge Y \in B))\Big)$$

Eine andere übliche verbale Formulierung des Auswahlaxioms lautet: Ist A eine Menge nichtleerer Mengen, dann gibt es eine Funktion f (von A in seine Vereinigung), die jedem Element B von A ein Element von B zuordnet („ein Element von B auswählt").
Mit den ZF-Axiomen kann man die Äquivalenz des Auswahlaxioms mit dem Wohlordnungssatz und dem Lemma von Zorn ableiten.

ZF mit Urelementen

Zermelo formulierte das originale ZF-System für Mengen und Urelemente. Mengen definierte er als elementhaltige Dinge oder die Nullmenge.[4] Urelemente sind dann Dinge ohne Elemente, und zwar betrachtete er die Nullmenge als ausgezeichnetes Urelement,[5] das als gegebene Konstante $\emptyset$ die ZF-Sprache erweitert. Mengen und Urelemente sind damit präzise definierbar:

$$M \text{ ist Menge: } \iff (M = \emptyset) \vee \exists X\colon (X \in M)$$
$$U \text{ ist Urelement: } \iff \neg\exists X\colon (X \in U)$$

Von der üblichen reinen ZF-Mengenlehre wird die Mengenlehre mit Urelementen unterschieden durch angehängtes U. Die Axiome von ZFU und ZFCU lauten abgesehen vom Leermengenaxiom verbal wie die Axiome von ZF oder ZFC, werden aber wegen der anderen Rahmenbedingungen anders formalisiert; ableitbare Mengenbedingungen können dabei entfallen.

ZFU

ZFU umfasst folgende Axiome:

Leermengenaxiom:
$\emptyset$ **ist Urelement**

Axiom der Bestimmtheit (abgeschwächtes Extensionalitätsaxiom):
$A \text{ ist Menge} \wedge B \text{ ist Menge} \Rightarrow (A = B \iff \forall C\colon (C \in A \iff C \in B))$

Vereinigungsaxiom:
$\forall A\colon \exists B\colon (B \text{ ist Menge} \wedge \forall C\colon (C \in B \iff \exists D\colon (D \in A \wedge C \in D)))$

Potenzmengenaxiom:
$\forall A\colon \exists P\colon \forall B\colon (B \in P \iff (B \text{ ist Menge} \wedge \forall C\colon (C \in B \Rightarrow C \in A)))$

Unendlichkeitsaxiom:
$\exists A\colon (\exists X \in A\colon \forall Y \in A\colon \neg(Y \in X) \wedge \forall X\colon (X \in A \Rightarrow X \cup \{X\} \in A))$

Fundierungsaxiom:
$\exists X\colon (X \in A) \Rightarrow \exists B\colon (B \in A \wedge \neg\exists C\colon (C \in A \wedge C \in B))$

Ersetzungsaxiom für zweistellige Prädikate $F(X, Y)$:
$\forall X, Y, Z\colon (F(X, Y) \wedge F(X, Z) \Rightarrow Y = Z) \Rightarrow \forall A\colon \exists B\colon (B \text{ ist Menge} \wedge \forall C\colon (C \in B \iff \exists D\colon (D \in A \wedge F(D, C))))$

Aus den ZFU-Axiomen und dem Axiom $\forall X\colon X \text{ ist Menge}$ folgen offenbar die ZF-Axiome. Denn aus dem *Ersetzungsaxiom* ist wie in ZF (siehe unten) das *Paarmengenaxiom* ableitbar und auch das *Aussonderungsaxiom*, letzteres hier in folgender Form für jedes einstellige Prädikat P:

$$\forall A\colon \exists B\colon (B \text{ ist Menge} \wedge \forall C\colon (C \in B \iff C \in A \wedge P(C)))$$

ZFCU

ZFCU umfasst die Axiome von ZFU und folgendes *Auswahlaxiom*:

$$\forall A\colon ((\forall X\colon (X \in A \Rightarrow \exists Y\colon (Y \in X)) \wedge \forall X, Y, Z\colon ((X \in A \wedge Y \in A \wedge Z \in X \wedge Z \in Y) \Rightarrow (X = Y))$$

WIKIPEDIA

Scottsches Axiomensystem

Das **Scottsche Axiomensystem**, benannt nach dem Mathematiker Dana Scott, ist ein Axiomensystem der Mengenlehre, das als alternativer Zugang zum Axiomensystem der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, kurz ZF, angesehen werden kann. Es verwendet das in ZF beweisbare Reflexionsprinzip als Axiom und kann auf diese Weise auf einige ZF-Axiome verzichten.

Inhaltsverzeichnis

Motivation
Das Axiomensystem
Äquivalenz zu ZF
Literatur

Motivation

Durch die Von-Neumann-Hierarchie wird das gesamte Mengenuniversum in Stufen V_α eingeteilt, wobei α die Ordinalzahlen durchläuft. Wir beschreiben hier drei Konsequenzen, die dann umgekehrt zu Axiomen des Scottschen Axiomensystems werden.

- $\forall x \exists \alpha\, (x \in V_\alpha)$

Das heißt, jede Menge x liegt in einer Stufe. Das ist genau die zum Fundierungsaxiom äquivalente Aussage der Von-Neumann-Hierarchie, wonach jede Menge bereits in einer Stufe liegt bzw. bezüglich der $\in$-Relation bereits durch eine Stufe beschränkt ist; man spricht daher auch vom *Beschränktheitslemma.*

- $\forall \alpha \forall x\, (x \in V_\alpha \leftrightarrow \exists \beta\, (\beta < \alpha \wedge (x \in V_\beta \vee x \subset V_\beta)))$

Wenn also x in einer Stufe V_α liegt, so liegt es bereits in einer niedrigeren Stufe V_β mit $\beta < \alpha$ oder ist als Teilmenge in einer solchen niedrigeren Stufe enthalten. Dieses sogenannte *Kumulierungslemma* folgt direkt aus der rekursiven Definition der Stufen V_α als Vereinigung aller Vorgänger oder als Potenzmenge des Vorgängers, je nachdem, ob α eine Limes-Ordinalzahl ist oder nicht.

Das *Reflexionsprinzip* besagt, dass jede in ZF formulierbare Aussage $\varphi = \varphi(x)$ bereits durch eine Stufe V_α gespiegelt wird, genauer:

- $\forall x \exists \alpha\, (x \in V_\alpha \wedge V_\alpha \textbf{ spiegelt } \varphi(x))$

Die Spiegelung durch die Stufe V_α bedeutet dabei die Spiegelung durch das durch „$x \in V_\alpha$" definierte Prädikat; Einzelheiten zum Begriff der Spiegelung findet man im Artikel Relativierung (Mengenlehre).

Diese drei Eigenschaften - Beschränktheitslemma, Kumulierungslemma und Reflexionsprinzip - sollen nun zu

Axiomen erhoben werden, ohne die in ZF definierten Stufen zu verwenden. Dazu benötigen wir ein neues Prädikat „x ist Stufe", das wir Σ nennen. Die Schreibweise Σx ist demnach als „x ist Stufe" zu lesen, und man kann sich darunter etwas Ähnliches wie die Stufen der Von-Neumann-Hierarchie vorstellen. Die genauen Eigenschaften dieser Stufen werden allerdings durch die Axiome des Scottschen Axiomensystems festgelegt, das nun vorgestellt wird.

Das Axiomensystem

Wir verwenden kleine lateinische Buchstaben als Variablen für Mengen und die Symbole $=, \in, \Sigma, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall$, wobei = für Gleichheit steht und $\in$ für die Elementbeziehung, Σ ein einstelliges Prädikat ist und die restlichen Symbole die üblichen logischen Symbole sind. In den folgenden Axiomen bezeichne $\varphi = \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine mengentheoretische Formel mit der Variablen x und möglicherweise weiteren Variablen (Parametern) $x_1, \ldots, x_n$.

- *Existenz*: $\exists x (x = x)$

Das Existenzaxiom fordert, dass es wenigstens eine Menge im Mengenuniversum gibt.

- *Extensionalität*: $\forall x\, y\, (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Das Extensionalitätsaxiom beschreibt den quantitativen Aspekt des Mengenbegriffs, enthalten zwei Mengen dieselben Elemente, so sind sie gleich.

- *Aussonderung*: $\forall x_1, \ldots, x_n \forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, x_1, \ldots, x_n))$

Zu jeder Menge und zu jeder Eigenschaft kann man die Menge derjenigen Elemente aussondern, die diese Eigenschaft erfüllen, genauer: Bei vorgegebener Formel φ und gegebenen Parametern gibt es zu jeder Menge x die Menge y, die genau aus denjenigen Elementen z aus x besteht, die der Eigenschaft $\varphi(z, x_1, \ldots, x_n)$ genügen. Dies ist kein einzelnes Axiom, sondern ein sogenanntes Schema von Axiomen, da man für jede Formel φ ein Axiom erhält.

- *Beschränktheit*: $\forall x \exists v\, (\Sigma v \wedge x \in v)$.

Jede Menge liegt in einer Stufe.

- *Kumulierung*: $\forall v\, (\Sigma v \rightarrow \forall x\, (x \in v \leftrightarrow \exists w (\Sigma w \wedge w \in v \wedge (x \in w \vee x \subset w))))$

Dabei steht $x \subset w$ wie üblich für $\forall z (z \in x \rightarrow z \in w)$. In Worten besagt das Kumulierungsaxiom: Wenn v eine Stufe ist, so gilt für jedes x aus dieser Stufe, dass es eine in v enthaltene Stufe w gibt, in der x als Element oder als Teilmenge liegt.

- *Reflexionsprinzip*: $\forall x \exists v\, (\Sigma v \wedge x \in v \wedge v \textbf{ spiegelt } \varphi(x, x_1, \ldots x_n))$

Hier soll φ alle Formeln ohne das Symbol Σ durchlaufen, es handelt sich also wieder um ein Schema von Axiomen. Der Ausdruck v **spiegelt** $\varphi(x, x_1, \ldots x_n)$ bedeutet dabei

$$\forall x_1, \ldots x_n\, (x_1 \in v \wedge \ldots \wedge x_n \in v \rightarrow (\varphi(x, x_1, \ldots x_n) \leftrightarrow [\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]^v))$$

wobei $[\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]^v$ die durch Relativierung nach v aus $\varphi(x, x_1, \ldots x_n)$ hervorgegangene Formel ist.

Die Gesamtheit dieser Axiome werde im Folgenden mit Σ bezeichnet.

Probeklausur [redacted] 16/17

Aufgabe 1

1.

A	[redacted]		$A \wedge B$	$B \to C$	$(A \wedge B) \to C$	$A \to (B \to C)$
0	[redacted]	[redacted]	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

✓

2. $\kappa(A) = \bot$, $\kappa(B) = \top$
   $\kappa \models A \to B$, $\kappa \not\models B \to A$ ↯

3. $\kappa(A) = \bot$, $\kappa(B) = \bot$, $\kappa(C) = \bot$
   $\kappa \models \underbrace{(A \to B)}_{\varphi_1}$, $\kappa \models \underbrace{(B \to C)}_{\varphi_2}$, $\kappa \models \underbrace{(C \to \neg A)}_{\varphi_3}$ $\qquad \kappa \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \qquad \kappa \not\models \bot$ ↯

4. $\kappa(A) = \top$, $\kappa(B) = \top$
   $\kappa \models ((A \vee B) \wedge A) \qquad \kappa \not\models \neg B$ ↯

Aufgabe 2

1. $x \in P(y)$
2. $(P(x) = P(y)) \to x = y \qquad \forall x (((x \in P(y) \to x \in P(z)) \wedge (x \in P(z) \to x \in P(y))) \to y = z)$
3. $\forall y (y \in x \to y \in P(x))$
4. $NL(x) = \exists y (y \in x)$. $\forall x . (NL(x) \to \exists y (y \in x \wedge \forall z ((z \in y \to \neg z \in x) \wedge (z \in x \to \neg z \in y))$
5. $GV(x,y) \equiv \forall z (z \in x \leftrightarrow \exists v (v \in y \wedge z \in v))$
   $EE(x) \equiv \forall z \forall y (z \in x \wedge y \in x) \to z = y$
   $\forall x (\exists y (\forall z (z \in y \to EE(z)) \wedge GV(x,y)))$

Aufgabe 3

$\{f(g(x, h(z)), z) \doteq f(g(h(z), h(z)), h(w))\} \xrightarrow{decomp} \{g(x, h(z)) \doteq g(h(z), h(z)), z \doteq h(w)\}$

$\xrightarrow{decomp} \{x \doteq h(z), h(z) \doteq h(z), z \doteq h(w)\} \xrightarrow{delete} \{x \doteq h(z), z \doteq h(w)\} \xrightarrow{elim} \{x \doteq h(h(w)), z \doteq h(w)\}$

Aufgabe 4

1. $\forall x\,((\forall y\,(R(x,y)) \vee \exists y\,(R(y,x))) \rightarrow \exists z\,(S(x,z) \wedge S(z,x)))$

$\hat{=}\ \forall x\,(\neg(\forall y\,(R(x,y)) \vee \exists y\,(R(y,x))) \vee \exists z\,(S(x,z) \wedge S(z,x)))$

$\hat{=}\ \forall x\,((\exists y\,(\neg R(x,y)) \wedge \forall y\,(\neg R(y,x))) \vee \exists z\,(S(x,z) \wedge S(z,x)))$

$\hat{=}\ \forall x\,\exists y_1\,\forall y_2\,\exists z\,((\neg R(x,y_1) \wedge \neg R(y_2,x)) \vee (S(x,z) \wedge S(z,x)))$

Skolemform

$\forall x\,\forall y_2\,((\neg R(x,f_1(x)) \wedge \neg R(y_2,x)) \vee (S(x,f_2(x,y_2)) \wedge S(f_2(x,y_2),x)))$

$= \forall x \forall y_2\,((\neg R(x,f_1(x)) \vee S(x,f_2(x,y_2))) \wedge (\neg R(y_2,x) \vee S(x,f_2(x,y_2)))$

Klauselform! $\wedge\ (\neg R(x,f_1(x)) \vee S(f_2(x,y_2),x)) \wedge (\neg R(y_2,x) \vee S(f_2(x,y_2),x)))$

2. $\{\neg R(x,y), \neg R(y,z), R(x,z)\}$ $\{R(x, f(g(x)))\}$ $\{R(f(x),a)\}$ $\{\neg R(c,a)\}$

$\{\neg R(f(g(x)),z), R(x,z)\}$

$\{\neg R(f(g(c)),a)\}$ — $\{\}$

Aufgabe 5

1	$\exists x \forall y\,(P(x,y))$	
2	$\boxed{c}\ \forall y(P(c,y))$	
3	$\boxed{d}$	
4	$P(c,d)$	$\forall E$, 2
5	$\exists x(P(x,d))$	$\exists I$, 4
6	$\forall y \exists x(P(x,y))$	$\forall I$, 3-5
7	$\forall y \exists x(P(x,y))$	$\exists E$, 1, 2-6

Aufgabe 6

IA $\mathcal{M}[\![\text{zero}]\!] = 0 \in \{0,1\} \ni 1 = \mathcal{M}[\![\text{one}]\!]$

IS Da E keine freien Variablen enthält, müssen die Terme stets aus den Konstanten

$\mathfrak{M} \models \exists x\, \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi[a/x]$ mit irgendeinem $a \in M$

Grundlagen der Logik in der Informatik WiSe 2016/17

Klausur [Probe]

Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Aufgabe 1 Aussagenlogische Konsequenz

Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten:

1. $((A \wedge B) \to C) \models (A \to (B \to C))$,
2. $(A \to B) \models (B \to A)$,
3. $((A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to \neg A)) \models \bot$ (hier steht $\bot$ für *falsum*),
4. $((A \vee B) \wedge A) \models \neg B$.

Im negativen Fall reicht es, wenn Sie ein einzelnes Gegenbeispiel angeben.

Aufgabe 2 Formalisierung in Prädikatenlogik

Wir betrachten eine naive Mengenlehre mit einem zweistelligen Prädikat $\in$ in Infixschreibweise und einer einstelligen Funktion p. Hierbei nennen wir die Elemente des Grundbereichs *Mengen*; wir lesen $p(x)$ als die Potenzmenge von x, und $x \in y$ wie üblich als „x ist Element von y". Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln erster Stufe über der Signatur $\{p/1, \in/2\}$:

1. x ist Teilmenge von y.
2. Jede Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.
3. Die Potenzmenge einer Menge enthält gerade die Teilmengen dieser Menge.
4. Jede nichtleere Menge enthält ein Element, mit dem sie keine Elemente gemeinsam hat.
5. Jede Menge ist die große Vereinigung ihrer höchstens einelementigen Teilmengen.

Hinweis: Es sollen explizit keine neuen Signatursymbole (wie etwa „große Vereinigung" oder „aus x gebildete einelementige Menge") eingeführt werden. Man muss also gegebenenfalls statt eines Begriffs die ihn definierende Eigenschaft verwenden; Sie dürfen aber Abkürzungen für Formeln einführen. Nicht erklärte Begriffe wie „Teilmenge" und „Vereinigung" sind in ihrer üblichen Bedeutung zu verstehen.

Aufgabe 3 Unifikation

Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Terme

$$f(g(x, h(z)), z) \text{ und } f(g(h(z), h(z)), h(w))$$

unifizierbar sind und ggf. einen mgu zu berechnen. (Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden!). Gefordert sind natürlich nicht nur die letztendliche Antwort, sondern auch die einzelnen gemäß dem Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, mit der Bezeichnung der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe 4 Prädikatenlogische Normalisierung und Resolution

1. Bringen Sie die Formel
$$\forall x((\forall y(R(x,y)) \vee \exists y(R(y,x))) \to \exists z(S(x,z) \wedge S(z,x)))$$
(die Formel selbst, nicht ihre Negation!) in pränexe Normalform, sodann in Skolemform und schließlich in Klauselform. Geben Sie bei den Umformungen ggf. die nötigen Zwischenschritte an. *Hinweis:* Sie dürfen bei der Umformung in Klauselform Kommutativität der Konjunktion bzw. Disjunktion verwenden; damit lässt sich ggf. etwas Schreibarbeit sparen, da man bei hinreichend geschicktem Vorgehen Skolemfunktionen mit weniger Argumenten erhält.
2. Verwenden Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass die aus den Klauseln
$$\{\neg R(x,y), \neg R(y,z), R(x,z)\}$$
$$\{R(x, f(g(x)))\}$$
$$\{R(f(x), a)\}$$
$$\{\neg R(c, a)\}$$
bestehende Klauselform unerfüllbar ist.

Aufgabe 5 Formale Deduktion in Prädikatenlogik erster Stufe

Geben Sie eine formale Herleitung mittels natürlicher Deduktion für die Formel

$$\exists x \forall y (P(x,y)) \to \forall y \exists x (P(x,y))$$

an. (Dabei ist P ein zweistelliges Prädikat.)

Aufgabe 6 Induktion

Sei $\Sigma = \{mult/2, zero/0, one/0\}$, und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell, so dass $M = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}[\![zero]\!] = 0$, $\mathfrak{M}[\![one]\!] = 1$ und für alle $x, y \in M$

$$\mathfrak{M}[\![mult]\!](x,y) = x * y.$$

Zeigen Sie durch Induktion über E, dass für jeden geschlossenen Term E (d.h. E enthält keine freien Variablen, formal: $FV(E) = \emptyset$) gilt

$$\mathfrak{M}[\![E]\!] \in \{0, 1\}.$$

Die Aufgaben sind untereinander gleich gewichtet; die Klausur ist mit der Hälfte der Punkte in jedem Fall bestanden.

~~1a) A B C | A→B C→B B→¬C φ ⊨ A~~
~~⊥ ⊥ ⊥ | T T T T~~

Aufgabe 1

a)

A	B	C	$A \to B$	$C \to B$	$B \to \neg C$	φ	$\neg A$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$

mit $\varphi = (A \to B) \land (C \to B) \land (B \to \neg C)$ $\qquad K \models \varphi \not\Rightarrow K \models \neg A$

b)

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$\neg A \to B$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

$K \models \neg(A \to B) \Rightarrow K \models (\neg A \to B)$ ✓

c)

A	B	$\neg A \land B$	$\neg A$	$(\neg A \land B) \lor \neg A$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0

✓

d)

A	B	C	$B \lor C$	φ_1: $A \to (B \lor C)$	$B \land A$	φ_2: $(B \land A) \to \neg C$	$\varphi_1 \land \varphi_2$	$A \to \neg C$	
0	0	0	0	1	0	1	1	1	
0	0	1	1	1	0	1	1	1	
0	1	0	1	1	0	1	1	1	
0	1	1	1	1	0	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	1	0	1	
1	0	1	1	1	0	1	1	0	$\leftarrow K \models \varphi_1 \land \varphi_2$
1	1	0	1	1	1	0	0	1	$\not\Rightarrow K \models A \to \neg C$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	

Aufgabe 2

a) $\text{teilt}(x,y) := \exists z\,(*(x,z)=y)$

b) $\text{prim}(x) := \neg(x=0) \land \neg(x=1)$
$\land\ \forall z\,(\text{kleiner}(z,x) \land \neg\,\text{teilt}(z,x)$
$\land\ (\text{kleiner}(1,z)))$

$\text{kleiner}(x,y) := \exists z\,(+(x,z)=y \land \neg(z=0))$

$\text{gerade}(x) := \exists k\,(\neg(k=0) \land *(k,(+(1,1)))=x)$

c) $\forall x\,(\text{prim}(x) \rightarrow \exists n\,(\text{prim}(+(x,n))))$

d) $\forall x\,((\text{gerade}(x) \land \text{kleiner}(+(1,1),x)) \rightarrow \exists k\,\exists j\,(\text{prim}(k) \land \text{prim}(j) \land (+(k,j)=x)))$

e) $PP(x) = (x=1) \lor \exists p\,(\text{teilt}(x,p) \land \forall q\,(\text{teilt}(x,q) \rightarrow p=q))$

Aufgabe 3

$\{g(f(z),h(z),f(y)) \doteq g(f(h(x)),h(y),f(f(x)))\}$

$\xrightarrow{\text{decomp}} \{f(z) \doteq f(h(x)),\ h(z) \doteq h(y),\ f(y) \doteq f(f(x))\}$

$\xrightarrow{\text{decomp}^{3}} \{z \doteq h(x),\ z \doteq y,\ y \doteq f(x)\} \xrightarrow{\text{elim}} \{z \doteq h(x),\ z \doteq f(x),\ y \doteq f(x)\}$

$\xrightarrow{\text{elim}} \{z \doteq h(x),\ h(x) \doteq f(x),\ y \doteq f(x)\} \xrightarrow{\text{conflict}} \bot$

Aufgabe 4

a) $\forall x\,(\exists y\,(\neg(R(x,y) \rightarrow R(y,x))) \lor \exists z\,(P(x,z) \lor Q(z)))$

$\doteq \forall x\,\exists y\,\exists z\,(\neg(\neg R(x,y) \lor R(y,x)) \lor P(x,z) \lor Q(z))$

Skolem: $\forall x\,((R(x,f_1(x)) \land \neg R(f_1(x),x)) \lor P(x,f_2(x)) \lor Q(f_2(x)))$

$\doteq \forall x\,((R(x,f_1(x)) \lor P(x,f_2(x)) \lor Q(f_2(x))) \land (\neg R(f_1(x),x) \lor (P(x,f_2(x)) \lor Q(f_2(x))))$

b) $\{R(x,f(x))\}$ $\{P(f(x))\}$ $\{\neg P(x), \neg S(x,y), Q(y)\}$ $\{\neg R(x,y), \neg P(y), S(y,x)\}$ $\{\neg Q(a)\}$

$\{\neg S(f(x),y), Q(y)\}$

$\{\neg P(f(x)), S(f(x),x)\}$ $\{\neg S(f(x),a)\}$

$\{S(f(x),x)\}$ $\{\}$

Aufgabe 5

1 $\forall x (\exists y (R(x,y))$
2 $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))$
3 $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$

4 $\boxed{c}$
5 $\exists y (R(c,y))$ $\forall E, 1$
6 $\forall y (R(c,y) \to R(y,c))$ $\forall E, 3$
7 $\boxed{d}$ $R(c,d)$
8 $R(c,d) \to R(d,c)$ $\forall E, 6$
9 $R(d,c)$ $\to E, 7, 8$
10 $(R(c,d) \wedge R(d,c)) \to R(c,c)$ $\forall E^3, 2$
11 $R(c,d) \wedge R(d,c)$ $\wedge I, 7, 9$
12 $R(c,c)$ $\to E, 10, 11$
13 $R(c,c)$ $\exists E, 5, 7-12$

14 $\forall x. R(x,x)$

Aufgabe 6

IA: $v = T / \perp$: also $\mathcal{M}[\![v]\!]\eta_1 = \eta_1(v) = T \Rightarrow T = \eta_2(v) = \mathcal{M}[\![v]\!]\eta_2$

~~IV: $\eta(v_1,v_2) = T$~~
~~$\mathcal{M}[\![\text{and}(v_1, v_2)]\!]$~~

IS: Fall 1 $E = \text{and}(E_1, E_2)$ Nach Vorraussetzung: $\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_1 = T \Rightarrow \mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_2 = T$
$\mathcal{M}[\![E_2]\!]\eta_1 = T \Rightarrow \mathcal{M}[\![E_2]\!]\eta_2 = T$

$\mathcal{M}[\![E]\!]\eta_1 = T = \mathcal{M}[\![\text{and}(E_1,E_2)]\!]\eta_1 = \mathcal{M}[\![\text{and}(E_1,E_2)\eta_1]\!] = \mathcal{M}[\![\text{and}(E_1\eta_1, E_2\eta_1)]\!]$
$= \text{and}(\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_1, \mathcal{M}[\![E_2]\!]\eta_2) = \text{and}(T,T) = T$

$\overset{IV}{\Rightarrow} \mathcal{M}[\![E]\!]\eta_2 = \mathcal{M}[\![\text{and}(E_1,E_2)]\!]\eta_2 = \ldots = \text{and}(\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_2, \mathcal{M}[\![E_2]\!]\eta_2) = \text{and}(T,T) = T$

Fall 2 $E = \text{or}(E_1, E_2)$ erfüllt, wenn a) $\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_1 = T$ und $\mathcal{M}[\![E_2]\!]\eta_1 = \perp$
b) " $= \perp$ " " $= T$
c) " $= T$ " " $= T$

$\mathcal{M}[\![E]\!]\eta_1 = T = \mathcal{M}[\![\text{or}(E_1,E_2)]\!]\eta_1 = \ldots = \text{or}(\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_1, \mathcal{M}[\![E_2]\!]\eta_1)$
a) $\mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_1 = T \Rightarrow \mathcal{M}[\![E_1]\!]\eta_2 = T$ $\Rightarrow \mathcal{M}[\![E]\!]\eta_2 = \ldots = \text{or}(\mathcal{M}[\![E_1]\!]$ ...

Aufgabe 1

a) $(A \to C) \wedge (B \to C) \models (A \vee B) \to C$

A	B	C	$A\to C$	$B \to C$	$A \vee B$	$(A\to C)\wedge(B\to C)$	$(A\vee B)\to C$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

✓

b) $\neg(A \to B) \wedge B \models A$

A	B	$A \to B$	$\neg(A\to B)\wedge B$	A
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

✓

c) $\neg B \not\models \neg(A \to B)$

A	B	$\neg B$	$\neg(A\to B)$	$(A \to B)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

$K \models \neg B \not\Rightarrow K \models \neg(A\to B)$

d)

A	B	$A\to B$	$B \to A$	$(A\to B)\vee(B\to A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

✓

Aufgabe 2

a) $\forall g\,(G(g) \to \forall a,b,c\,((I(a,g) \wedge I(b,g) \wedge I(a,c) \wedge I(b,c)) \to I(c,g)))$

b) ~~Durchschnitt(i,j) = ∀a ∀a~~ $\forall i \forall j\,(G(i) \wedge G(j) \to \exists z\,(G(z) \wedge \forall a\,((I(a,x) \wedge I(a,y)) \to I(a,z)))$

$P(a) \wedge$

c) $\forall g\,(G(g) \to (KP(g) \vee EP(g) \vee 3P(g)))$

$KP(g) = \neg \exists x\,(I(x,g) \wedge P(x))$

$EP(g) = \forall a \forall b\,((P(a) \wedge P(b) \wedge I(a,g) \wedge I(b,g)) \to a=b)$

$3P(g) = \exists a \exists b \exists c\,(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge I(a,g) \wedge I(b,g) \wedge I(c,g) \wedge \neg(a=b) \wedge \neg(b=c)$
$\wedge \neg(c=a)$

d) $\forall s\,(S(s) \to \exists a \exists b\,(I(a,s) \wedge I(b,s) \wedge \neg(a=b)))$

$P(a) \wedge P(b)$

$\forall a,b\,(P(a) \wedge P(b) \to \exists s\,(S(s) \wedge I(a,s) \wedge I(b,s)))$

Aufgabe 3

$\{f(h(z), g(x), w) \doteq f(w, z, h(h(x)))\} \xrightarrow{decomp} \{h(z) \doteq w, g(x) \doteq z, w \doteq h(h(x))\}$

$\xrightarrow{elim} \{h(z) \doteq h(h(x)), g(x) \doteq z, w \doteq h(h(x))\} \xrightarrow{decomp} \{z \doteq h(x), g(x) \doteq z, w \doteq h(h(x))\}$

$\xrightarrow{elim} \{z \doteq h(x), g(x) \doteq h(x), w \doteq h(h(x))\} \xrightarrow{conflict} \bot$

Aufgabe 5

1	$\forall x(\exists y(R(x,y)))$	
2	$\forall y(R(z,y) \to \neg P(y))$	
3	$\forall y(R(z,y) \to P(y))$	
4	$\exists y(R(z,y))$	$\forall E, 1$
5	$\boxed{d}\ R(z,d)$	
6	$R(z,d) \to \neg P(d)$	$\forall E, 2$
7	$R(z,d) \to P(d)$	$\forall E, 3$
8	$\neg P(d)$	$\to E, 6$
9	$P(d)$	$\to E, 7$
10	$\bot$	$\bot I, 8, 9$
11	$\bot$	$\exists E, 4, 5-10$
12	$\neg \forall y(R(z,y) \to P(y))$	

Aufgabe 6

$\Sigma = \{zero/0, one/0, mult/2\}$

$\mathcal{M} = \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{M}[\![one]\!] = 1$, $\mathcal{M}[\![zero]\!] = 0$, für alle $x, y \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M}[\![mult]\!](x,y) = x \cdot y$

14. $\mathcal{M}[\![zero]\!]$ $\rightarrow$ gleich 0

$\mathcal{M}[\![one]\!]$ $\rightarrow$ ungerade

2 $\rightarrow$ gerade, $\neq 0$ $\rightarrow$ $\exists\, x \in FV(E)$, sodass $\eta(x)$ gerade: $x = 2$ ✓

$\mathcal{M}[\![mult]\!](1,2) = 1 \cdot 2$

15: Wenn $\mathcal{M}[\![E]\!]\eta$ gerade, dann hat Auswertung davon $(2x)z$ dort stehen (sonst ist $z \in \mathbb{N}$ nicht gerade)
mit $x \geq 1$ in $\mathbb{N}$

also … ist $E = mult[mult(2,x), z]$ …

WS 14/15

UNIVERSITÄT PASSAU

Aufgabe 1

1. $(A \land B) \to C \models A \to C$

A	B	C	$A \land B$	$(A \land B) \to C$	$A \to C$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$K \models (A \land B) \to C \not\Rightarrow K \models (A \to C$

↯

2. $\underbrace{(A \lor B) \to C}_{\varphi_1} \models \underbrace{(A \to C) \lor (B \to C)}_{\varphi_2}$

A	B	C	$A \lor B$	$A \to C$	$B \to C$	φ_1	φ_2
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

✓

3. $\underbrace{A \land (A \to B)}_{\varphi_1} \models \underbrace{B \land (B \to A)}_{\varphi_2}$

A	B	$A \to B$	$B \to A$	φ_1	φ_2
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

✓

4. $(A \to B) \land (A \to C) \land (\neg B \to C) \models C \lor A$

$K(A) = \bot \quad K(B) = \top \quad K(C) = \bot$

$K \models (A \to B) \land (A \to C) \land (\neg B \to C)$

$K \not\models C \lor A$ ↯

WS '14/15

A2 $0, 1, +, *, \geq$, isNat(n)

1. N ist Prim

$teilt(k,n) = \exists x\, (*(k,x) = n \wedge isNat(x))$

$prim(n) = \neg(\exists x\, (\neg(x=0) \wedge \neg(x=1) \wedge teilt(x,n))) \wedge isNat(n)$

2. zu jeder Zahl gibt es eine mind. ebenso große nat. Zahl

$\forall k\, (\exists n\, (isNat(n) \wedge (n \geq k)))$

3. es gibt eine pos. Zahl ohne Quadratwurzel (rat. Zahl)

~~hasQuadrat~~ $hassqrt(x) = \exists n\, (*(n,n) = x)$

$\exists x\, (x \geq 0 \wedge \neg hassqrt(x))$

4. Quadratwurzel von 2 ist irrational

$2 := +(1,1)$

$rational(a) := \exists x \exists y\, (*(a,y) = x \wedge isNat(x) \wedge isNat(y))$

~~$\exists x\, \neg rational(x)$~~ $\forall x\, (*(x,x) = 2 \rightarrow \neg rational(x))$

5. Summe zweier rationaler Zahlen ist wieder rational

$\forall x \forall y\, (rational(x) \wedge rational(y) \rightarrow rational(+(x,y)))$

Aufgabe 3

$\{f(g(y), z, h(x)) \doteq f(g(z), x, h(g(y)))\}$

$\xrightarrow{decomp} \{g(y) = g(z), z = x, h(x) = h(g(y))\} \xrightarrow{decomp^2} \{y = z, z = x, x = g(y)\}$

$\xrightarrow{elim} \{y \doteq z, z \doteq g(y), x \doteq g(y)\} \xrightarrow{elim} \{y \doteq z, y \doteq g(y), x \doteq g(y)\} \xrightarrow{occurs} \perp$

~~Aufgabe 4~~

~~1 $\forall x \forall y\, (R(x, f(y)) \rightarrow R(x,y))$~~

~~2 $\forall x \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$~~

~~3 $\forall x \forall y\, (R(f(g(x)), f(y)))$~~

~~4 $\boxed{c}$~~

~~5 $\forall y\, R(f(g(c)), f(y))$ $\quad \forall E\ 3$~~

~~6 $\boxed{d}$~~

~~7 $R(f(g(c)), f(d))$ $\quad \forall E, 5$~~

~~8 $R(f(g(c)), f(d)) \rightarrow R(f(g(c)), d)$ $\quad \forall E, 1\ [f(g(c))/x, d/y]$~~

~~9 $R(f(g(c)), d)$~~

~~10 $\forall y\, R(f(g(c)), d)$~~

~~11~~

$\exists x \forall y$

Aufgabe 4

$(\forall x \forall y\, (R(x, f(y)) \to R(x,y)))$

$\wedge\, (\forall x \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x)))$

$\wedge\, (\forall x\, \forall y\, (R(f(g(x)), f(y))) \wedge \neg\, (\exists x\, \forall y\, R(x,y))$

$\forall x\, \exists y (\neg R(x,y))$

$\{\neg R(x_1, f(y_1)), R(x_1, y_1)\}$ $\{\neg R(x_2, y_2), R(y_2, x_2)\}$

$\{R(f(g(x_3))), f(y_3)\}$

$\{\neg R(x_1, f(y_1)), R(y_1, x_1)\}$

$\{\neg R(x_4, k(x_4))\}$

$\{\neg R(k(x_4), x_4)\}$

Aufgabe 5

1 $\forall x\, \exists y\, (P(x,y) \vee P(y,x))$

2 $\boxed{c}$

3 $\exists y\, (P(c,y) \vee P(y,c))$

$\boxed{d}$ $P(c,d) \vee P(d,c)$

$\cancel{P(c,d)}$ $\vee$

$\cancel{P(d,c)}$

$P(c,d)$

$\exists y\; P(c,y)$

$\exists y\; P(c,y) \;\vee\; \exists y\, P(y,c)$

$P(d,c)$

$\exists y\; P(y,c)$

$\exists y\, P(c,y) \;\vee \exists y\, (y,c)$

$\exists y\, P(c,y) \vee \exists y P(y,c)$

$(\exists y\; P(c,y)) \vee (\exists y\, P(y,c))$

$\forall x\, (\exists y\, (P(x,y))) \vee (\exists y\, (P(y,x))$

Aufgabe 6

$\forall E\, (\forall \eta\, (FV(E) \neq \{\} \to \exists x\, (x \in FV(E)$

$\wedge\, \eta(x) = \bot)) \to M[\![E]\!] = \bot)$