



Wintersemester 2017/2018

Lineare und kombinatorische Optimierung

Übungsblatt 12

Gruppenübungen

Aufgabe 1. (Ein kleiner Beweis zur Optimalität)

(0 Punkte)

Sei $A = A^T$. Zeigen Sie, dass jede zulässige Lösung von

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax = c \end{array}$$

optimal ist.

Lösung:

Wir stellen das duale LP auf:

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top y \\ \text{s.t.} & Ay = c \end{array}$$

Sei x zulässig für das (primale) LP. Nach dem Schwachen Dualitätssatz (Satz 11.1) ist der Zielfunktionswert des dualen LPs für jede zulässige Lösung y eine untere Schranke für den Zielfunktionswert des primalen LPs ($c^\top x \geq c^\top y$). Da jede zulässige Lösung x für das primale LP auch zulässig für das duale LP ist und beide Probleme denselben Zielfunktionswert haben ($c^\top x = c^\top y$), folgt mit Korollar 11.2 die Optimalität von x .

Aufgabe 2. (Wiederholung Lineare Algebra und Alternativsatz 11.3)

(0 Punkte)

1. Bestimmen Sie Basen für die vier linearen Unterräume Spaltenraum $R(A)$, Zeilenraum $R(A^\top)$, Kern $N(A)$ und Kern $N(A^\top)$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Benennen Sie die wichtigsten Beziehungen dieser vier linearen Unterräume?
3. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Gleichungssystem nicht lösbar ist und

$$b = b_1 + b_2$$

mit $b_1 \in N(A^\top)$ und $b_2 \in R(A)$ gilt.

4. Geben Sie ein $y \in \mathbb{R}^m$ an mit

$$A^\top y = 0 \quad \text{und} \quad b^\top y \neq 0.$$

Lösung:

1. Wir erhalten folgende Basen zu den vier Unterräumen:

Eine Basis von $R(A)$ ist $\{(1, 2)^\top\}$.

Eine Basis von $R(A^\top)$ ist $\{(1, 2, 4)^\top\}$.

Eine Basis von $N(A)$ ist $\{(-2, 1, 0)^\top, (-4, 0, 1)^\top\}$.

Eine Basis von $N(A^\top)$ ist $\{(-2, 1)^\top\}$.

2. Die folgenden beiden Eigenschaften sind fundamental:

$$\begin{aligned} R(A) &\perp N(A^\top) \\ R(A^\top) &\perp N(A) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m &= \dim R(A) + \dim N(A^\top) \\ n &= \dim R(A^\top) + \dim N(A). \end{aligned}$$

3. Das Gleichungssystem ist wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

nicht lösbar. Zudem erhalten wir

$$b_1 + b_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{8}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in N(A^\top)} + \underbrace{\frac{36}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in R(A)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

4. Mit $y = (-\frac{16}{10}, \frac{8}{10})^\top$ gilt

$$A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{16}{10} \\ \frac{8}{10} \end{pmatrix} = 0, \quad b^\top y = (2 \ 8) \begin{pmatrix} -\frac{16}{10} \\ \frac{8}{10} \end{pmatrix} = \frac{32}{10} \neq 0.$$

Aufgabe 3. (Modellierung)

(0 Punkte)

Lässt sich das folgende Optimierungsproblem als LP formulieren? Wenn ja, dann geben Sie eine solche Formulierung an. Wenn nicht, begründen Sie dies.

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{x_1, x_4\} \\ \text{s.t.} \quad & |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| \leq 10 \\ & \max\{x_1, x_2\} \leq \min\{x_3, x_4\} \\ & \frac{x_2 - x_4}{x_1 + x_3 + 1} \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Lösung:

Das Optimierungsproblem lässt sich in folgender Weise als LP formulieren:

Für die Zielfunktion benötigen wir eine weitere Variable $t \in \mathbb{R}$. Als neue Zielfunktion erhalten wir

$$\min t$$

mit zusätzlichen Nebenbedingungen

$$x_1 \leq t \quad \text{und} \quad x_4 \leq t.$$

Die Nebenbedingung $|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| \leq 10$ lässt sich allgemein schreiben als

$$-10 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$$

oder wegen $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ und $x_4 \geq 0$ einfach nur

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10.$$

Die Nebenbedingung $\max\{x_1, x_2\} \leq \min\{x_3, x_4\}$ lässt sich schreiben als vier lineare Nebenbedingungen

$$x_1 \leq x_3, \quad x_1 \leq x_4, \quad x_2 \leq x_3, \quad x_2 \leq x_4.$$

Schließlich kann man die fraktionale Nebenbedingung (da der Nenner sicher positiv ist) schreiben als

$$x_2 - x_4 \leq 4(x_1 + x_3 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad -4x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq 4.$$

Daher lautet das LP

$$\begin{array}{llll} \min & t \\ \text{s.t.} & & & \\ & x_1 & \leq & t \\ & x_4 & \leq & t \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 10 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & -10 \\ & x_1 & \leq & x_3 \\ & x_1 & \leq & x_4 \\ & x_2 & \leq & x_3 \\ & x_2 & \leq & x_4 \\ & -4x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Hausübungen

Aufgabe 4. (Modellierung)

(3 Punkte)

Aus drei Steinbrüchen S_1, S_2 und S_3 mit den Vorräten (in Tonnen) $s_1 = 4, s_2 = 23$ und $s_3 = 14$ ist Schotter auf insgesamt fünf Baustellen B_1, \dots, B_5 zu transportieren. Die Bedarfsmeldungen sind $b_1 = 12, b_2 = 5, b_3 = 6, b_4 = 7$ und $b_5 = 8$. Die Transportkosten (€/Tonne) sind wie folgt aufgeschlüsselt:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
S_1	12	5	13	9	6
S_2	11	16	17	3	7
S_3	4	11	11	8	6

Geben Sie ein lineares Optimierungsproblem zur Bestimmung eines Transportplans mit minimalen Kosten an.

Lösung:

Sei $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Menge der Baustellen und $S := \{1, 2\}$ die Menge der Steinbrüche. Mit c_{ij} seien die Transportkosten von $i \in S$ nach $j \in B$ bezeichnet. Sei s_i der Vorrat in Steinbruch i und b_j der Bedarf auf Baustelle j . Die Variable $t_{ij} \geq 0$ modelliert die Menge Schotter, die von $i \in S$ nach $j \in B$ geliefert wird. Die Transportkosten sind zu minimieren:

$$\min \sum_{(i,j) \in S \times B} c_{ij} t_{ij}.$$

Die Nachfrage ist zu befriedigen:

$$\forall j \in B \quad \sum_{i \in S} t_{ij} \geq b_j.$$

Jeder Steinbruch hat nur einen begrenzten Vorrat:

$$\forall i \in S \quad \sum_{j \in B} t_{ij} \leq s_i.$$

Aufgabe 5. (Extremalpunkte)

(2+1 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine Menge \mathcal{K} heißt *Kegel*, wenn mit $x \in \mathcal{K}$ auch $\alpha x \in \mathcal{K}$ für jede Zahl $\alpha \geq 0$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) Jeder Kegel hat höchstens einen Extremalpunkt (Ecke), nämlich den Ursprung.
- (ii) Ein polyedrischer Kegel der Form $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) hat genau einen Extremalpunkt, nämlich den Ursprung.

Lösung:

1. Die Aussage ist wahr: Sei $x \in \mathcal{K}$, $x \neq 0$. Es ist zu zeigen, dass x kein Extremalpunkt (Ecke) ist.

Da mit $x \in \mathcal{K}$ auch $\alpha x \in \mathcal{K}$ für alle $\alpha \geq 0$, gilt

$$y = \frac{1}{2}x \in \mathcal{K} \quad \text{und} \quad z = \frac{3}{2}x \in \mathcal{K}.$$

Damit ist

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

eine Darstellung von x als echte Konvexkombination von Punkten aus \mathcal{K} und daher ist x kein Extremalpunkt.

2. Die Aussage ist falsch: Für $A = 0$ ist $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ und besitzt offensichtlich keinen Extremalpunkt.

Aufgabe 6. (Probleme mit Ganzzahligkeitsbedingungen)

(1+1+2 Punkte)

Betrachten Sie das folgende allgemeine LP mit Ganzzahligkeitsbedingungen:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{IP}$$

Solche Probleme sind im Allgemeinen sehr schwierig zu lösen. Ersetzt man die Ganzzahligkeitsbedingungen $x_i \in \{0, 1\}$ durch die linearen Nebenbedingungen $0 \leq x_i \leq 1$, so erhält man die sogenannte *LP-Relaxierung*

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{R}$$

also ein LP, das wir z. B. mit dem Simplex-Algorithmus lösen können.

Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen (IP) und (R):

- (i) Was sagt der Optimalwert von (R) über den Optimalwert von (IP) aus?
- (ii) Im Allgemeinen erfüllt die Optimallösung von (R) nicht für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Bedingung $x_i \in \{0, 1\}$. Was kann man für (IP) folgern, wenn dies zufällig doch der Fall ist?
- (iii) Was folgt aus der Zulässigkeit bzw. Unzulässigkeit von (R) für (IP)?

Lösung:

- (i) Die zulässige Menge von (IP) ist eine Teilmenge der zulässigen Menge von (R), daher ist der Optimalwert von (R) eine untere Schranke für den Optimalwert von (IP).
- (ii) Wenn die Optimallösung von (R) die Bedingung $x_i \in \{0, 1\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ erfüllt, so ist sie auch optimal für (IP).

- (iii) Wenn (R) unzulässig ist, so ist auch (IP) unzulässig, da die zulässige Menge von (IP) eine Teilmenge der zulässigen Menge von (R) ist. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht: Betrachte das Beispiel

$$\begin{array}{ll}
 \min & x \\
 \text{s.t.} & x \leq \frac{1}{2} \\
 & -x \leq -\frac{1}{2} \\
 & x \in \{0, 1\}
 \end{array}
 \quad (IP)
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min & x \\
 \text{s.t.} & x \leq \frac{1}{2} \\
 & -x \leq -\frac{1}{2} \\
 & 0 \leq x \leq 1
 \end{array}
 \quad (R)$$

Hier ist die zulässige Menge von (IP) leer und die von (R) enthält nur den Punkt $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 7. (Programmieraufgabe: Erweiterbares Min-Cost-Flow-Problem)

(4 Punkte)

Laden Sie die Datei `ProgAufgabe12.py` aus Studon herunter und fügen Sie sie in ihr PyCharm ein.

In dieser Aufgabe erweitern wir das Min-Cost-Flow-Problem aus Programmieraufgabe 10. Zusätzlich zu allen bisherigen Spezifikationen ist es nun möglich, einen bestimmten, bisher nicht existenten Bogen zu bauen. Der Bau eines Bogens bringt einmalige Fixkosten, danach hat der Bogen eine Kapazität und Betriebskosten wie jeder andere Bogen auch. Da das Bauen eines Bogens eine binäre Entscheidung ist, ist dieses Problem kein lineares Programm mehr sondern ein sog. Mixed-Integer-Program (kurz MIP), also ein teils ganzzahliges Problem. In der Vorlesung haben Sie keine Methoden kennengelernt, mit denen man MIPs behandelt, dies ist Inhalt der Vorlesungen Diskrete Optimierung I+II. Wir zeigen ihnen allerdings ausblicksartig, wie Sie solche Probleme mit Gurobi lösen können.

Ihre Aufgabe ist es die Methode

`network_extension(base_graph, extension_graph)`

zu implementieren, die obiges Optimierungsproblem mit `gurobipy` modelliert und löst. Der bisherige Inhalt der Methode ist die Musterlösung von Programmieraufgabe 10. Bauen Sie am besten auf dieser oder auf ihrer eigenen Implementierung von Programmieraufgabe 10 auf.

- `base_graph` ist der Ausgangsgraph, also der gleiche Graph wie in Programmieraufgabe 10.
- `extension_graph` ist der Ausbaugraph. Er enthält die gleichen Knoten wie der Ausgangsgraph, aber nur Bögen, die nicht in `base_graph` sind, aber nicht zwingend all diese. Jeder Bogen im Ausbaugraphen hat die bekannten Attribute `capacity` und `cost`, und das neue Attribut `extension_cost`, welche die Kosten für den einmaligen Bau dieses Bogens darstellen.

Die Idee, dieses MIP zu modellieren ist folgende: Zusätzlich zu den bisherigen Variablen fügen Sie zunächst Flussvariablen für alle Kanten des Ausbaugraphen hinzu, allerdings ohne feste Kapazitätsschranke. Fügen Sie außerdem für jeden Bogen im Ausbaugraphen eine Binärvariable hinzu, die angibt, ob die Kante ausgebaut wurde. Sie deklarieren eine Variable als binär, indem Sie der Methode `.addVar` zusätzlich das Argument `vtype = grb.GRB.BINARY` übergeben. Sie können sich auch gleich überlegen, was der Zielfunktionskoeffizient der Ausbauvariable ist.

Zuletzt müssen Sie dafür sorgen, dass die Flussvariablen der Ausbaukanten nur genutzt werden dürfen, wenn der jeweilige Bogen auch gebaut wurde (d.h. wenn die Ausbauvariable den Wert 1 annimmt). Fügen Sie dafür für jede Ausbaukante eine Nebenbedingung hinzu, die die zugehörige Flussvariable nach oben beschränkt durch Kapazität mal Ausbauvariable des Bogens. Durch diesen Trick wird die Flussvariable auf den Wert 0 gezwungen, sobald die jeweilige Ausbauvariable den Wert 0 annimmt.

Lösung:

Die Musterlösung der Programmieraufgabe finden Sie im StudOn in der Datei `ProgAufgabe12_Loesung.py`.

Gruppe 1: Abgabe der Hausaufgaben am 30.01.2018 in der Übung.
 Gruppe 2+3: Abgabe der Hausaufgaben am 31.01.2018 in der jeweiligen Übung.