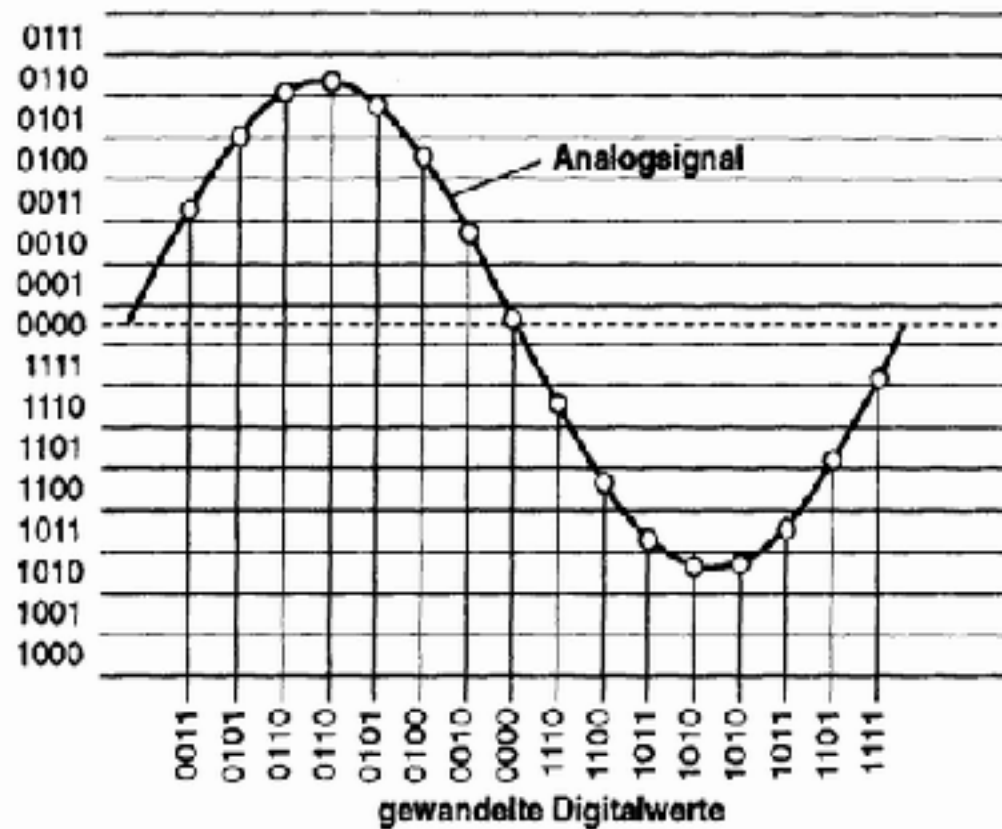


Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Diskretisierung und Quantisierung (Teil 1)

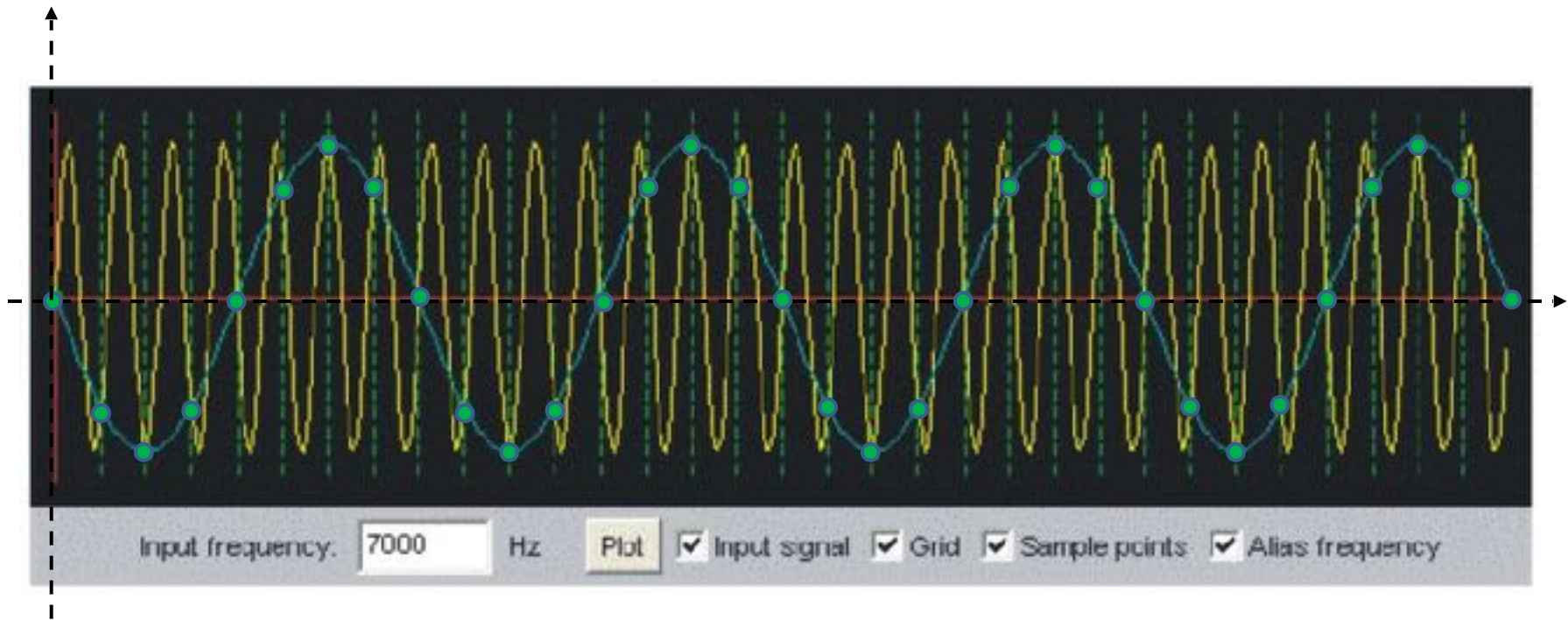


- Analoge Aufnahme von Sprache, Bildern, ...
- Digitale Speicherung durch **Diskretisierung + Quantisierung** → Informationsverlust



- Reproduzierbarkeit: Welche Abtastrate?

- ▶ Abtastrate: Anzahl der Punkte pro Zeit-/Orts-Einheit (\rightarrow Hz, dpi)
- ▶ hohe Effizienz \rightarrow möglichst niedrig
- ▶ gute Reproduzierbarkeit (Informationsverlust) \rightarrow möglichst hoch



- Speichern von Bildern
- Grauwert wird repräsentiert durch eine (reelle) Zahl zwischen 0 und 1
- Grauwertbild: $B : [a,b] \times [c,d] \rightarrow [0,1]$
- Digitalisierung
 - ▶ Diskretisierung (Abtasten) des rechteckigen Gebiets
 - ▶ Quantisierung der Grauwerte

- Grauwertbild: $B : [a,b] \times [c,d] \rightarrow [0,1]$
- Digitale Speicherung durch
Diskretisierung + Quantisierung
- Diskretisierung (Abtasten) des rechteckigen Gebiets
 - ▶ Bildschirm, Digitalkamera, ... z.B. 1024 x 1280 Pixel
 - ▶ Drucker (dpi = dots per inch), 1200dpi entspricht $25400\mu\text{m}/1200=21\mu\text{m}$
- Quantisierung der Grauwerte
 - ▶ Universell, z.B. uniform (256 Grauwerte)
 - ▶ datenabhängig
- Ortsauflösung vs. Farbauflösung (Dithering)

- Drucker können keine Grautöne drucken, nur schwarz oder weiße Punkte
- Grautöne entstehen indem nur (einige) schwarze Punkte gedruckt werden
je mehr/weniger desto dunkler/heller,
- *Dithering-Verfahren*: nach welchen Regeln werden die schwarzen Punkte ausgewählt



- Diskretisierung
 - ▶ Faltung
 - ▶ Fourier Transformation
 - ▶ Abtasttheorem
 - ▶ Aliasing / Anti-Aliasing
- Quantisierung
 - ▶ Diskrete Approximation reeller Werte
 - ▶ Beispiel: Quantisierung von Farbwerten
 - ▶ Vektor-Quantisierung

Die Faltung ist ein geeignetes (math.) Modell zur Beschreibung zahlreicher physikalischer Vorgänge.

- Die **lineare Filterung** eines Signals ist die Faltung der Original-Funktion mit der Impulsantwort des Filters.
- Bei optischen Abbildungen stellt das Bild die Faltung der originalen Bildfunktion mit der Punkt-Verbreiterungs-Funktion (*Point Spread Function* oder PSF) dar.
- **Diffusions-Prozesse** lassen sich durch die Faltung ebenfalls beschreiben.
- Wenn X und Y zwei statistisch unabhängige Zufallsprozesse mit den **Verteilungsdichtefunktionen** f und g sind, dann ist die Verteilungsdichtefunktion des Summenprozesses $X+Y$ gegeben als $f * g$.

- Für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ ist die **Faltung** definiert durch

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x - y) dy$$

- $D = \mathbb{R}$ oder $D = \mathbb{R}_+$ oder $D = [0, T]$ (T-periodisch)

- $D = \mathbb{R} :$
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy$$

- $D = \mathbb{R}_+ :$
$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x - y) dy$$

- Für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ ist die Faltung definiert durch

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x - y) dy$$

- Anschaulich: mathematischer Operator, welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion liefert indem
 „ $f(x)$ mit der Gewichtsfunktion $g(-x)$ gemittelt wird“
- Rolle von f und g kann vertauscht werden (kommutativ):

$$f * g = g * f$$

- auch assoziativ: $f * (g * h) = (f * g) * h$

- Für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ ist die Faltung definiert durch

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x - y) dy$$

- Anschaulich: mathematischer Operator, welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion liefert indem

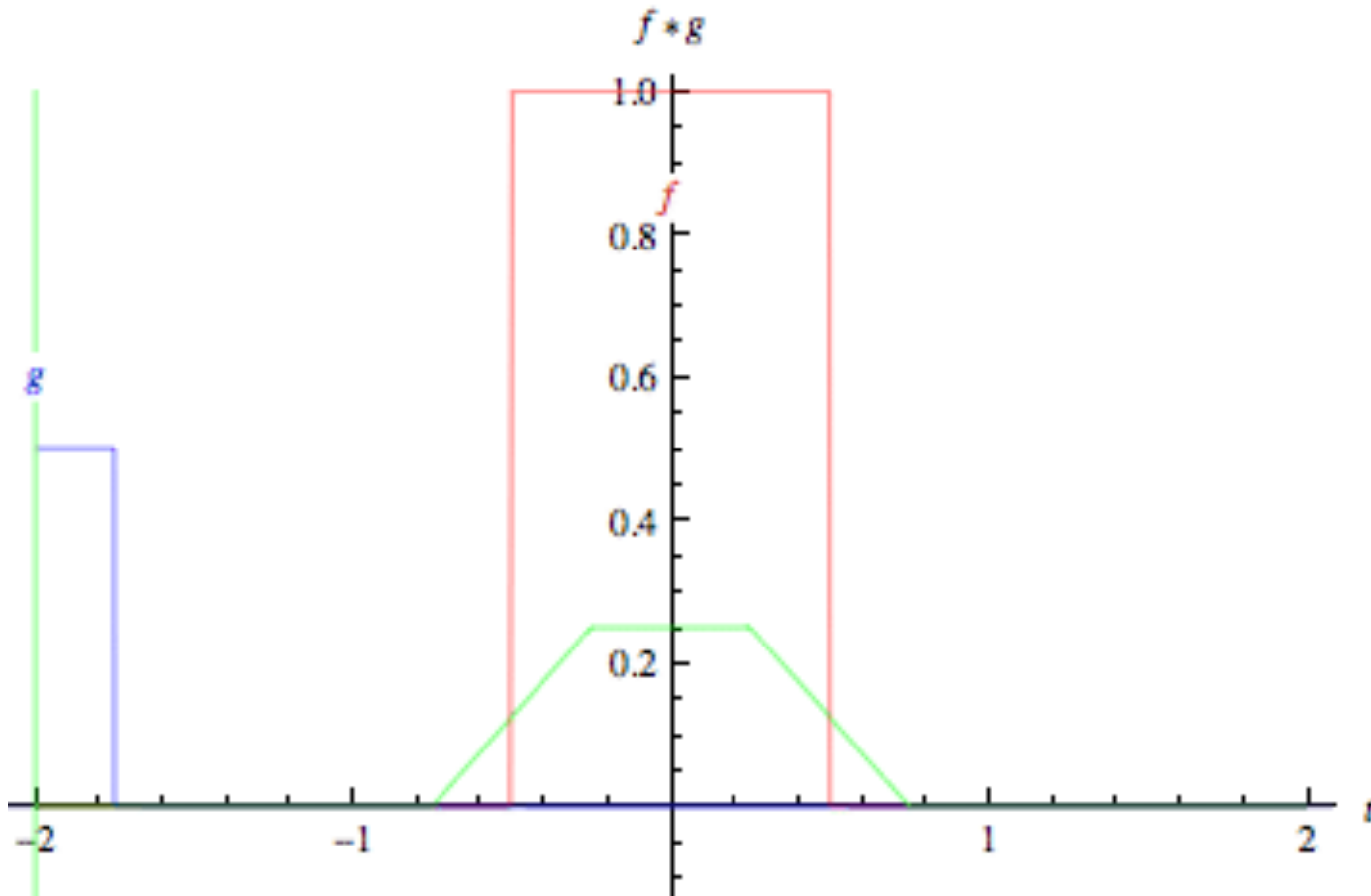
„ $f(x)$ mit der Gewichtsfunktion $g(-x)$ gemittelt wird“

- Betrachte eine Funktion als "Gewichtsfunktion" (z.B. g),
 - ▶ spiegele diese am Ursprung : $g(-y)$,
 - ▶ verschiebe diese gespiegelte Funktion an die Stelle x : $g(-(y-x))$,
 - ▶ middle die andere Funktion mit diesem (verschobenen) Gewicht.
 - ▶ falls die "Gewichtsfunktion" symmetrisch ist, entfällt das Spiegeln!

- Beispiel

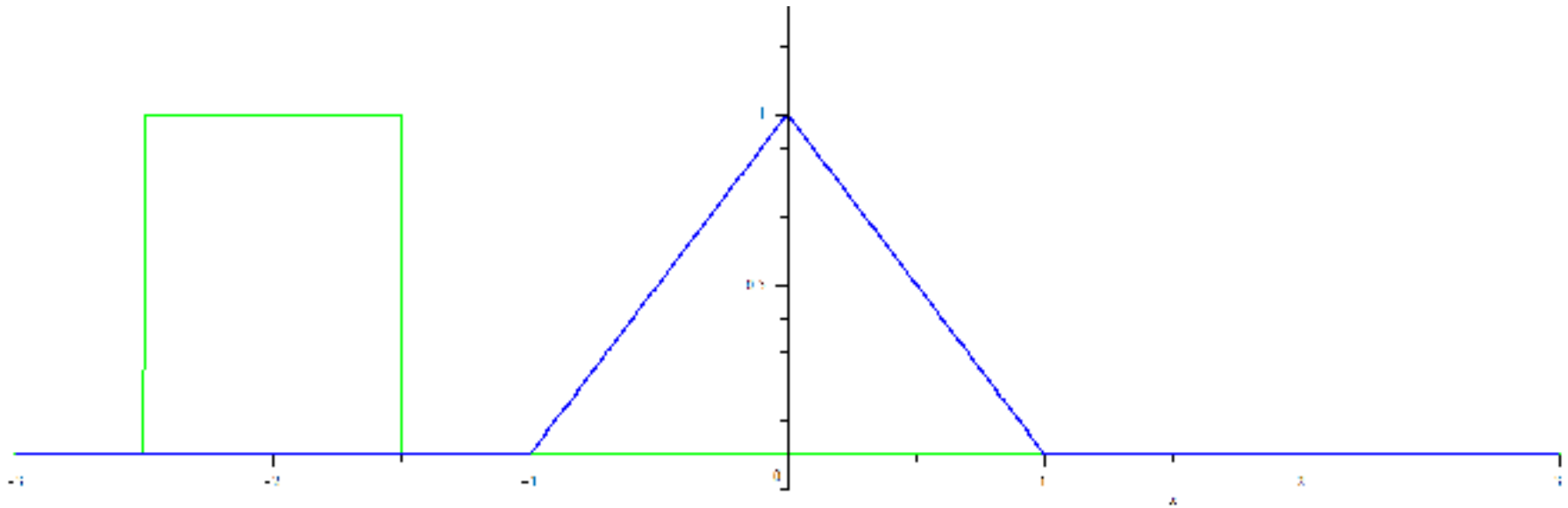
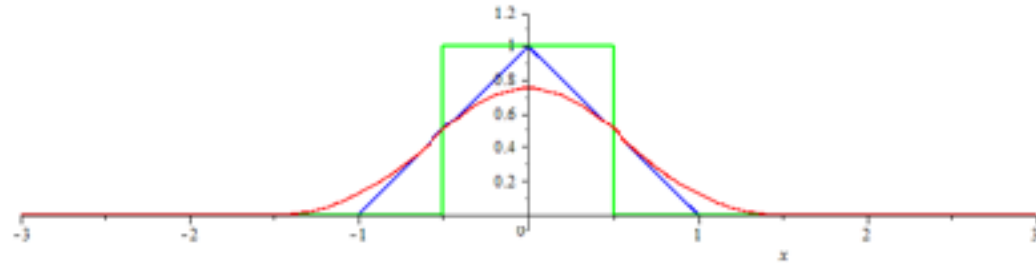
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

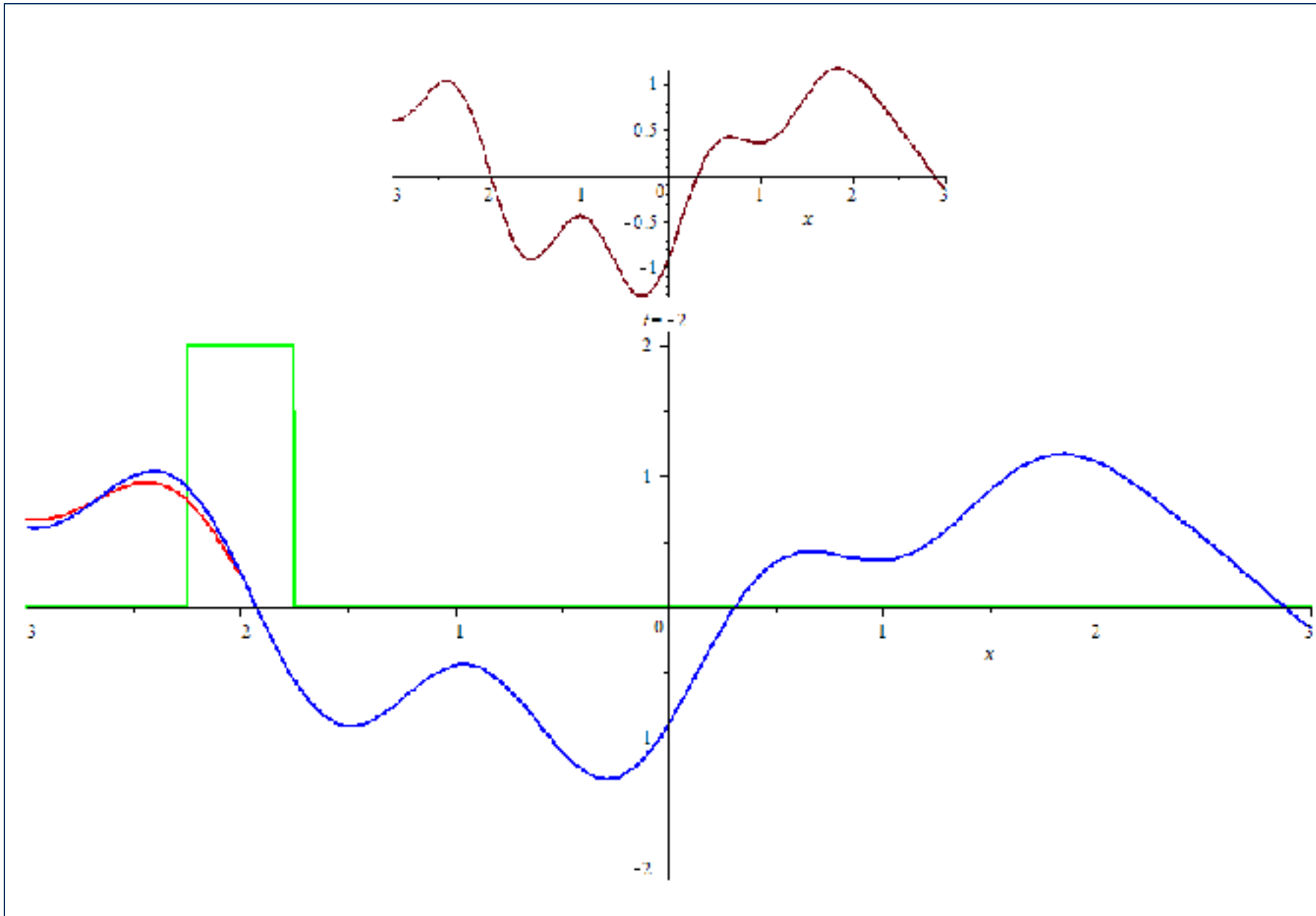
$$g(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{falls } |x| \leq 0.25 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{falls } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq 0.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$





- Diskrete Faltung oder Filtern für Zahlenfolgen $[f(n)]$, $[g(n)]$

$$(f * g)(n) = \sum f(k)g(n - k)$$

- Indexmenge:

$$I = \mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad I = \mathbb{N}$$

$$\text{oder } I = \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (\text{periodisch, modulo } N)$$

- Interpretation: (diskretes) Signal f wird gemittelt mit Gewichten $g(-n)$ (meist endliche Ausdehnung)

z.B.

$$g = \frac{1}{4}[1, \underline{2}, 1] = [\dots, 0, 0, 0.25, \underline{\underline{0.5}}, 0.25, 0, 0, \dots]$$

- Rechengesetze:

Für die Faltung gelten die gleichen Regeln wie für die gewöhnliche Multiplikation:

- ▶ kommutativ: $f * g = g * f$
- ▶ assoziativ: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- ▶ distributiv: $f * (g + h) = f * g + f * h$

- Beispiel Tiefpass (Mittelung bzw. Glättung)

- ▶ kontin. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{falls } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} : (f * g)(t) = \frac{1}{2a} \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau$

- ▶ diskret $g(n) = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{falls } |n| \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} : (f * g)(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} f(k)$

- Tensorprodukt-Ansatz für bivariate Funktionen
 - ▶ Kontinuierlicher Fall: $f(s,t)$ und $g(s,t)$;
 - ▶ Diskreter Fall: $[f(n,m)]$ und $[g(n,m)]$;
- Falte zunächst in s/n -Richtung und dann das Ergebnis in t/m -Richtung --- oder umgekehrt

- ▶ kontinuierlich:

$$(f * g)(s,t) = \int_{\tau} \left(\int_{\sigma} f(s - \sigma, t - \tau) g(\sigma, \tau) d\sigma \right) d\tau$$

- ▶ diskret

$$(f * g)(n,m) = \sum_l \left(\sum_k f(n - k, m - l) g(k, l) \right)$$

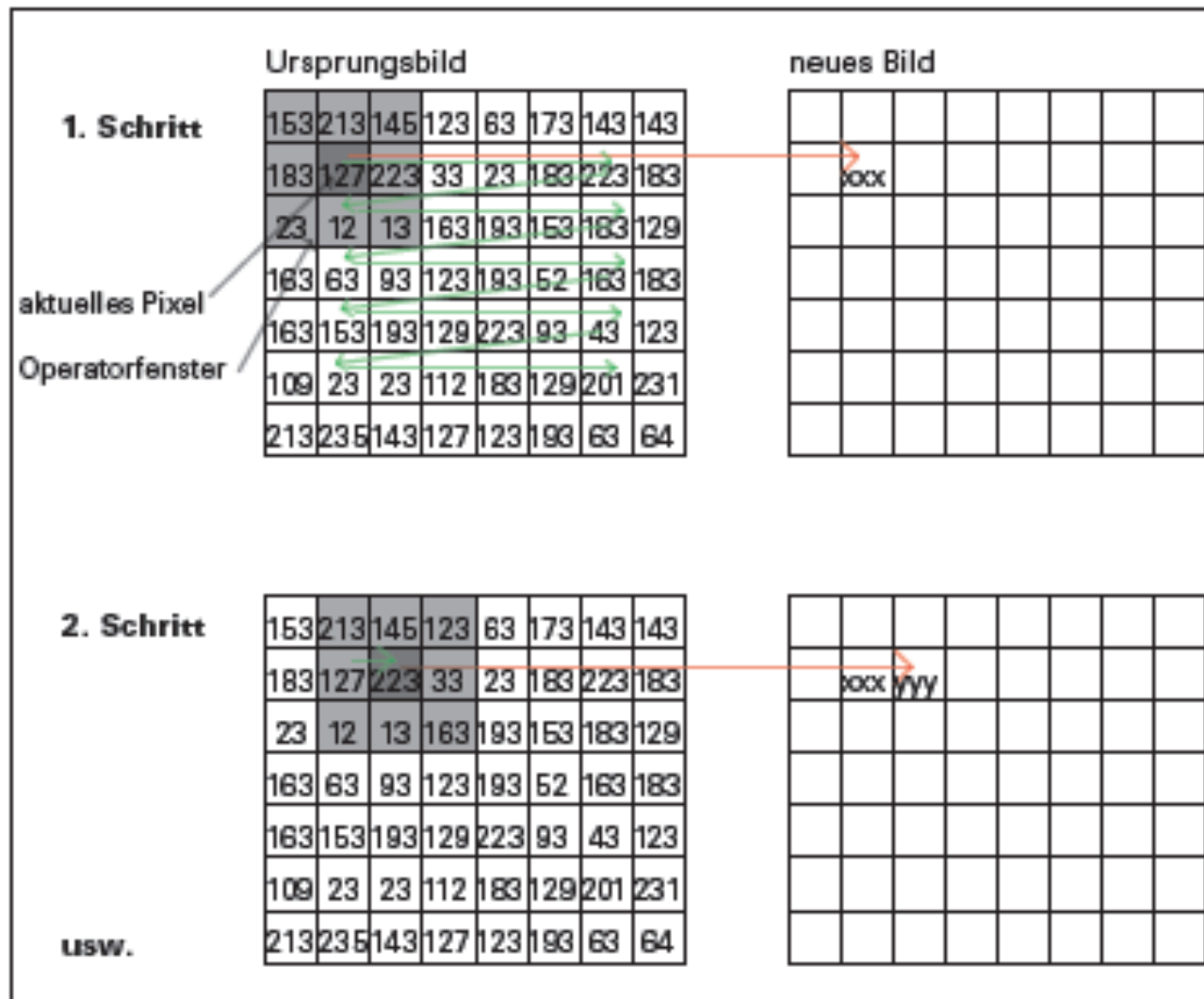
- Implementierung für Bild: Maske läuft über das Bild
- Glättung: Faltungskern z.B. Tiefpass-Filter, oder diskrete Gaussfunktion bzw. Bartlett-Filter (=Dreiecksfilter)

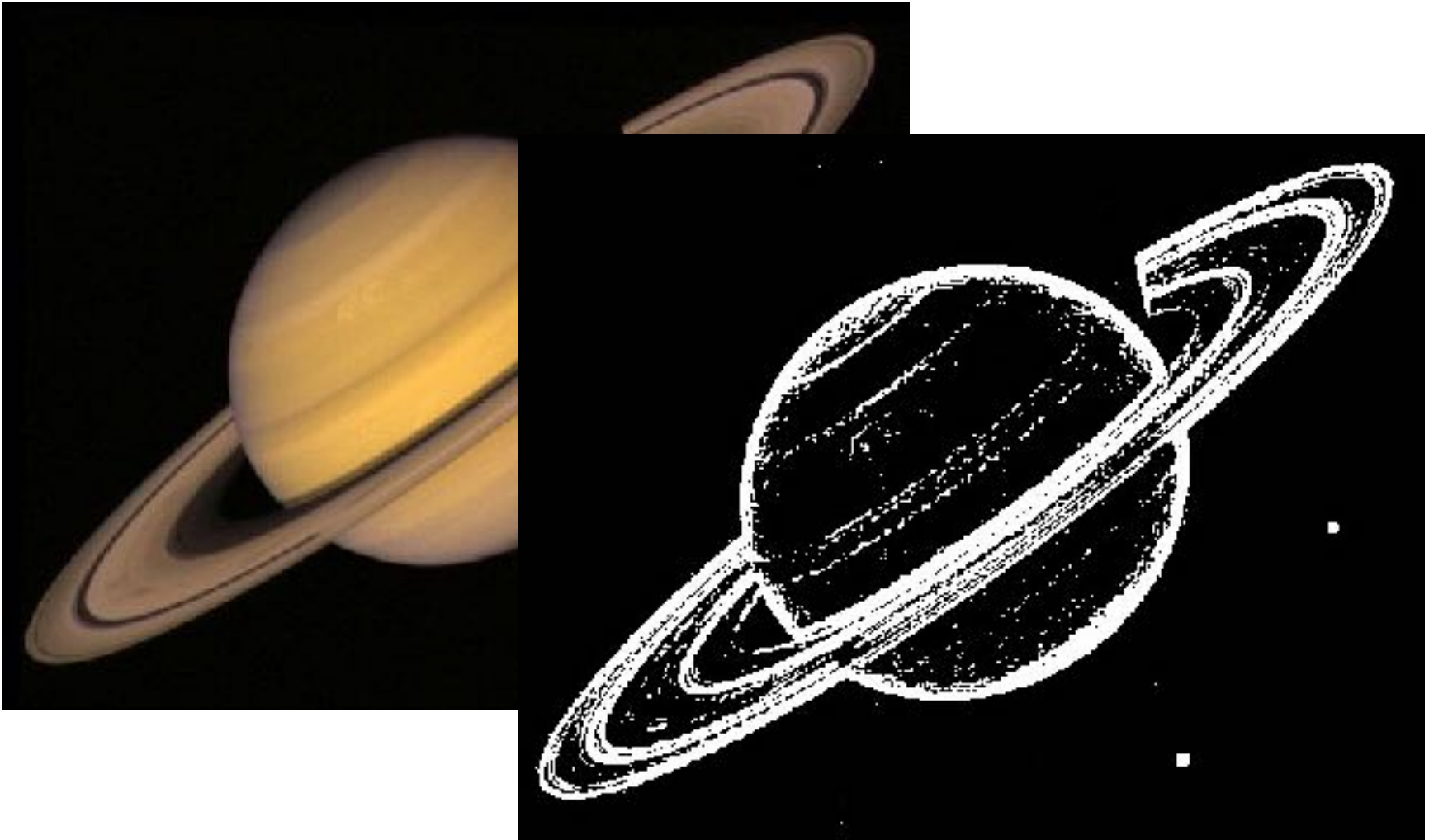
$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \underline{4} & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{positive Gewichte mit Summe} = 1)$$

- Kantendetektion: Faltungskern z.B. Sobeloperator

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{0} & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & \underline{0} & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





- **Separierbare Filter** in 2D

Idee: Filtere 2D-array (z.B. Bild) zweimal

- jede Zeile mit einem 1D-Filter $[u(i)]$;
- jede Spalte mit einem 1D-Filter $[v(i)]$;

- Das Ergebnis entspricht einer Filterung mit dem 2D-Filter
 $[w(i,j)] = [u(i) \cdot v(j)]$

- Beispiel : $[u(i)] = [-1, \underline{0}, 1]$, $[v(i)] = \frac{1}{4}[1, \underline{2}, 1]$

ergibt

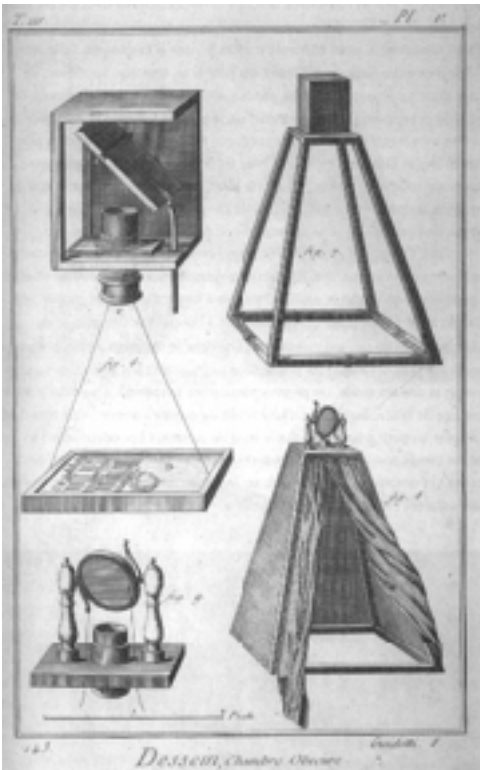
$$[w(i,j)] = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.25 \\ -0.5 & \underline{0} & 0.5 \\ -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

- Warum separierbare Filter:
Separierbare Filter sind effizient !
- Aufwand für das Filtern eines 2D-Arrays der Größe $N \times N$ mit einem Filter der Größe $k \times k$:
 - ▶ nicht separierbar: $k^2 \cdot N^2$ Multiplikationen
 - ▶ separierbar : $2 \cdot k \cdot N^2$ Multiplikationen
- Wann ist ein Filter separierbar?
Genau dann wenn die Filtermaske (als Matrix) Rang 1 hat
- Beispiele:

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

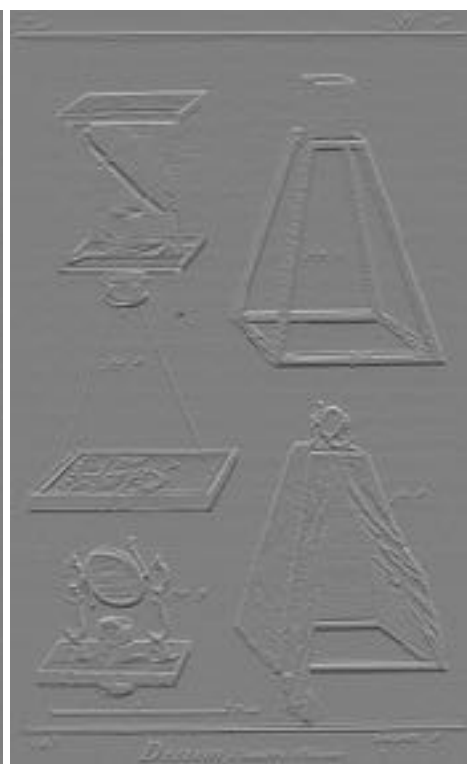
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Original



Sobel
horizontal



Sobel
vertikal



Kombination

- Harmonische Schwingungen

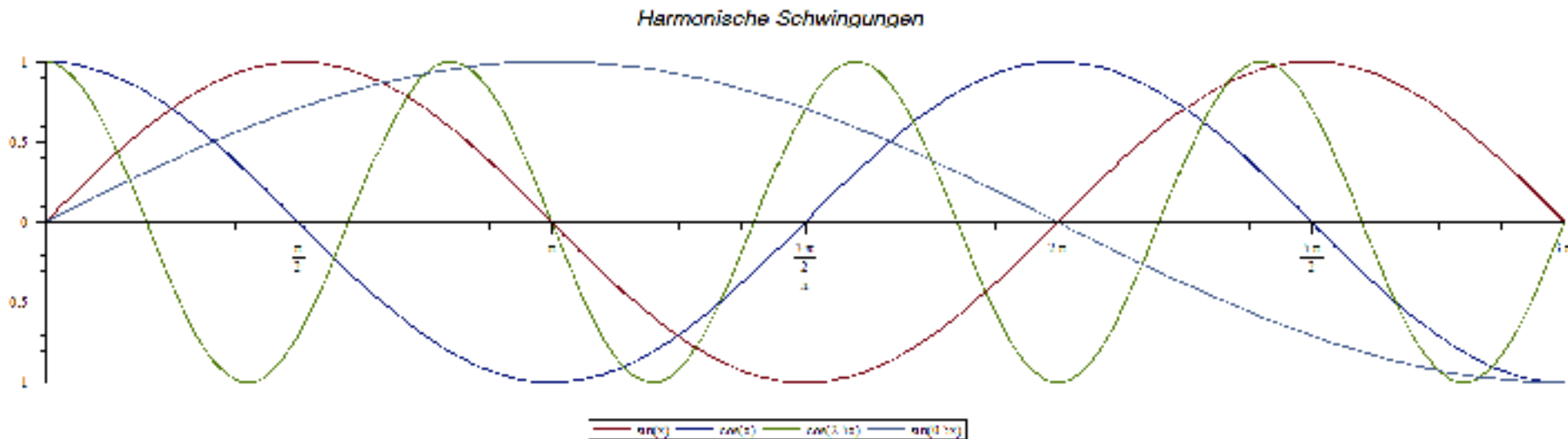
$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(k \cdot x)$, $\cos(k \cdot x)$,

komplexe Version (Euler - Formel) :

$$e^{ikx} = \cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x)$$



Joseph Fourier
1768-1830



- Harmonische Schwingungen: $e^{ikx} = \cos(k \cdot x) + i \cdot \sin(k \cdot x)$
 k Wellenzahl, $\lambda = (2\pi)/k$ Wellenlänge, $\nu = k/(2\pi)$ Frequenz
- **Mathematisches Theorem:** Jede (quadratisch integrierbare) Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{C}$ kann man durch Superposition von harmonischen Schwingungen darstellen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(k) \cdot e^{ikx} dk$$

- Die Funktion $\tilde{f}(k)$ heißt **Spektralfunktion** oder **Fourier-Transformierte** von $f(x)$, es gilt:

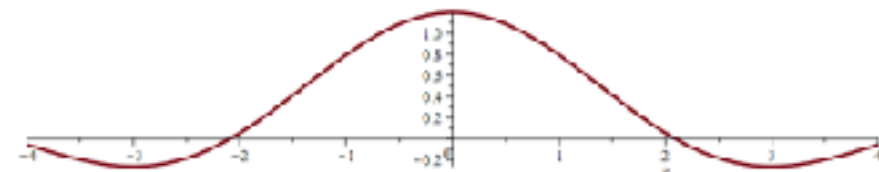
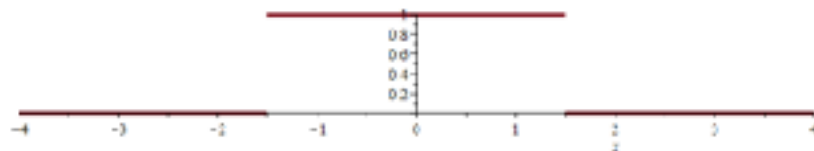
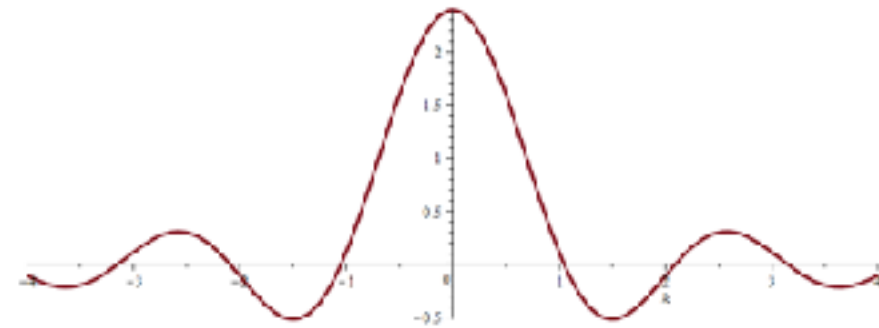
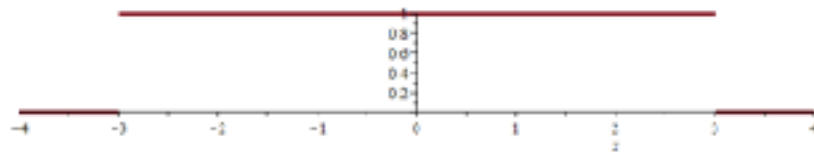
$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

- Tiefpass

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_a(k) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \text{sinc}(ak)$$

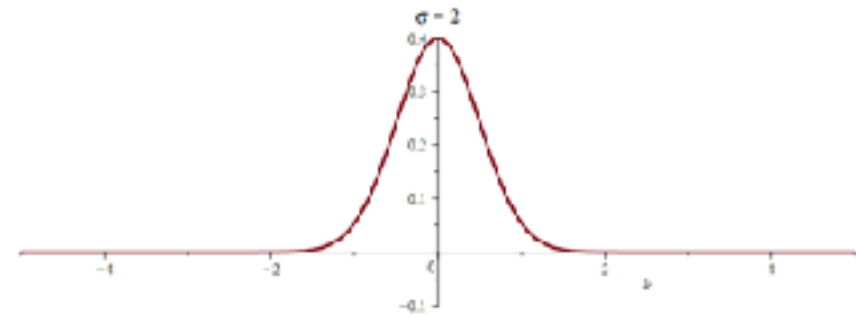
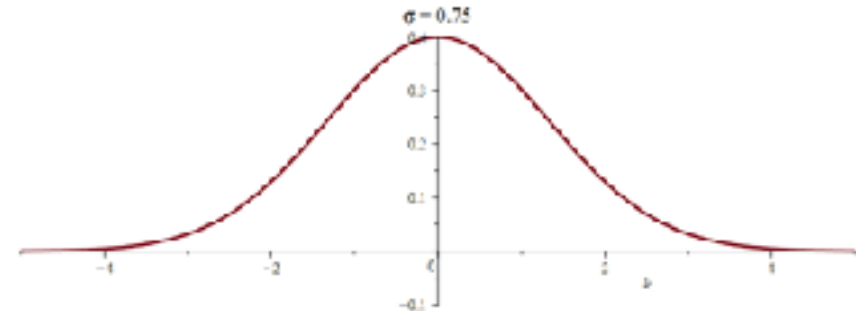
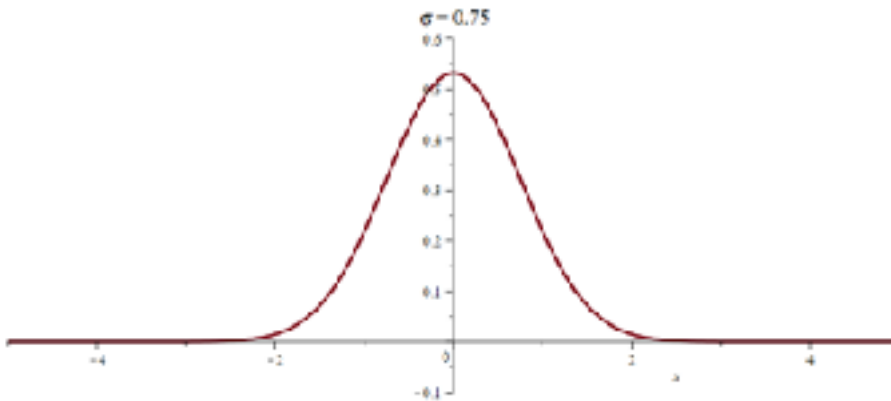
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



- Gauss-Funktion

$$h_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

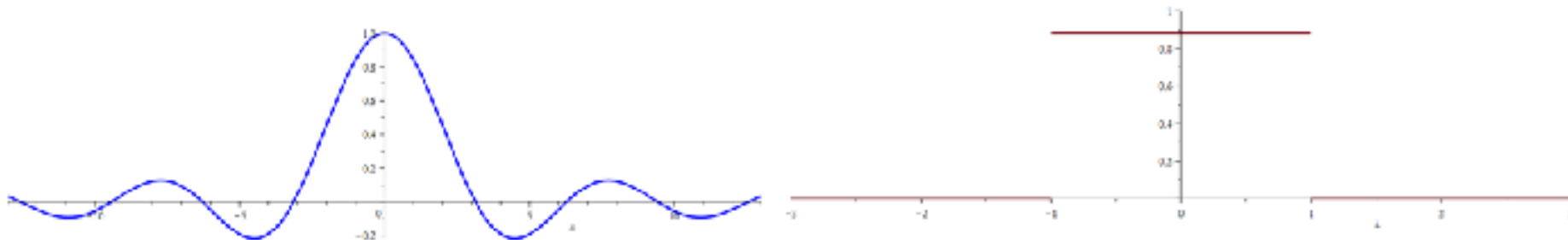
$$\tilde{h}_{\sigma}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)$$



- sinc-Funktion

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{sinc}^{\sim}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \chi_1(k)$$



- Beachte: ist f gerade (d.h. achsensymmetrisch bzw. $f(x) = f(-x)$) dann sind *Fouriertransformierte* und *Inverse Fouriertransformierte* von f identisch!

- Die „Dirac-Funktion“ δ :

Für alle Funktionen f gilt : $\int f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0)$

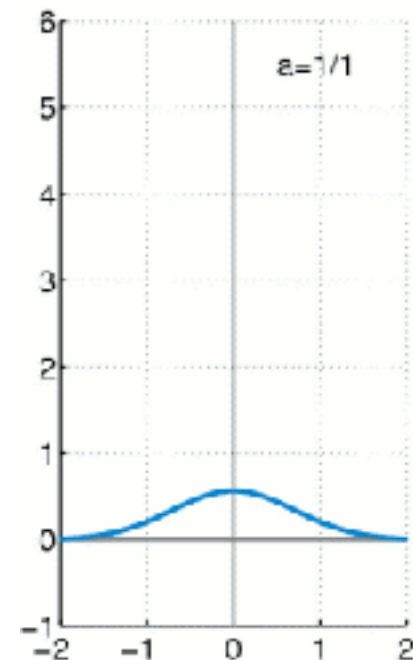
- $\delta_a(x) = \delta(x-a)$: $\int f(x) \cdot \delta_a(x) dx = f(a)$

- Fourier-Transformierte:

$$\tilde{\delta}(k) = 1 \quad \tilde{\delta}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ika)$$

- Faltung mit δ_a = Verschiebung um a

$$(\delta_a * f)(x) = \int \delta_a(y) f(x-y) dy = f(x-a)$$



- Die Fourier-Transformation macht aus der **Faltung** eine **Multiplikation** und aus der Multiplikation eine Faltung:

$$\widetilde{f * g} = \sqrt{2\pi} \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{g} \quad \text{und} \quad \tilde{f} * \tilde{g} = \sqrt{2\pi} \cdot \widetilde{f \cdot g}$$

- Gleiches gilt für die inverse Fourier-Transformation

Ist das Spektrum $\tilde{g}(k)$ einer kontinuierlichen Funktion $g(x)$ bandbegrenzt,

d.h. $\tilde{g}(k) = 0$ für $|k| \geq k_{max}$

und wählt man eine Schrittweite Δx mit $\Delta x \cdot k_{max} \leq \pi$

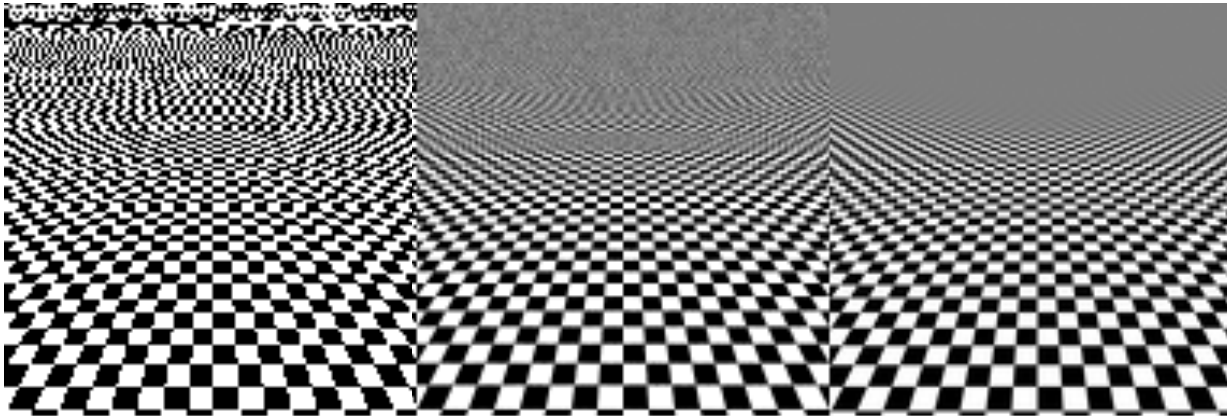
Dann kann $g(x)$ aus den Abtastwerten $[g(j \cdot \Delta x)]_{j \in \mathbb{Z}}$ exakt rekonstruiert werden.

Die maximale Wellenzahl, die ohne Fehler abgetastet werden kann, wird als Nyquist-Wellenzahl oder Grenzwellenzahl bezeichnet.

Merkregel:

Abtastrate $\frac{1}{\Delta x}$ mind. doppelt so groß wie maximale Frequenz $\frac{k_{max}}{2\pi}$

- **Aliasing:** Artefakte die durch „falsches“ Abtasten entstehen
Beispiel Schachbrett

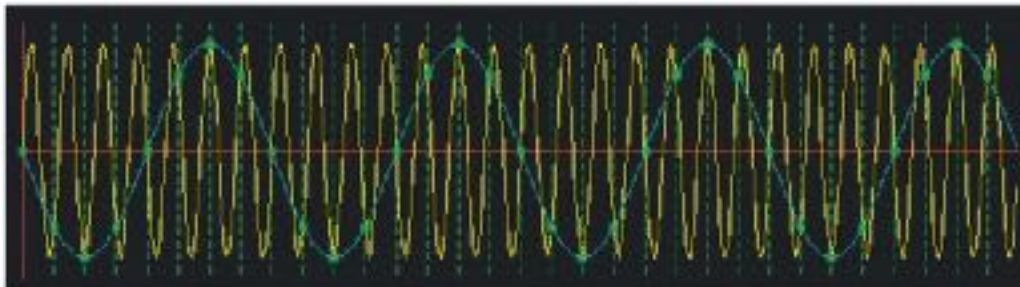


Einfaches
Abtasten

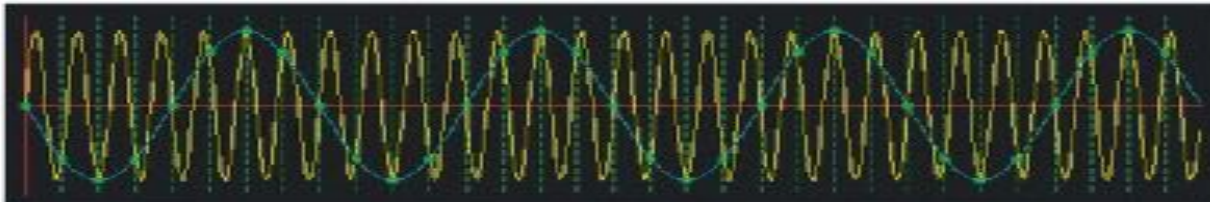
erst Filtern
dann Abtasten

Filtern und
Supersampling

- **Erklärung**

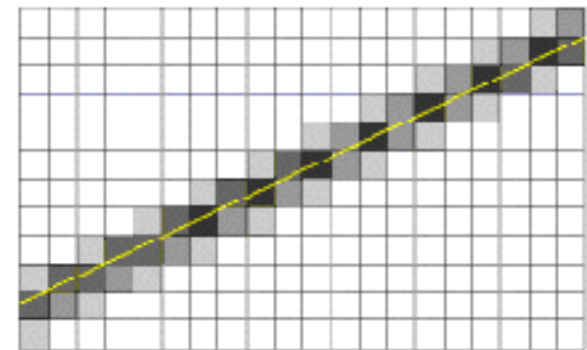
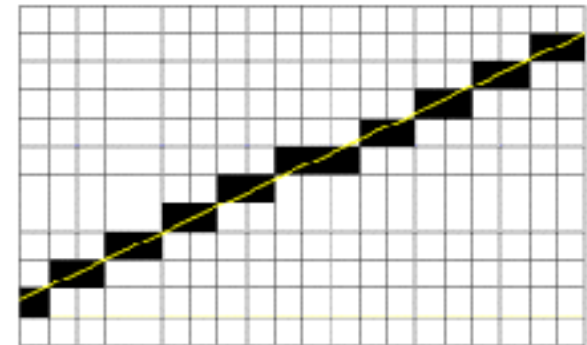


- Dieser Effekt tritt auf, wenn das zu messende Signal hochfrequente Anteile enthält, die gemäß Abtast-Theorem nicht reproduzierbar sind.
- Durch (Unter-)Abtasten der hohen Frequenzen wird eine nicht vorhandene, niedrigere Frequenz vorgetäuscht.



- Antialiasing: Vor dem Abtasten die höheren Frequenz entfernen: d.h.
 - ▶ im Frequenzraum: Multiplikation mit Tiefpass (χ -Funktion)
 - ▶ im Ortsraum: Falten (= Filtern) mit sinc-Funktion

- **Aliasing:**
Linie in schrägem Winkel auf einem Raster-Display.
→ gezacktes Erscheinungsbild
- **Antialiasing-Strategie:**
 - ▶ Pixel in der Nähe der Linie werden mit verschiedenen Zwischentönen von Linienfarbe und Hintergrundfarbe versehen.
Glättung der Linie (oder Kante) für das Auge.



- Tensorproduktansatz

$$\tilde{f}(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

$$(f * w)(x_1, y_1) = \int \int f(t_1, t_2) w(x_1 - t_1, x_2 - t_2) dt_1 dt_2$$

- Separierbare Filterkerne $w(x_1, x_2) = w(x_1) \cdot w(x_2)$

$$(f * w)(x_1, y_1) = \int \left[\int f(t_1, t_2) w(x_1 - t_1) dt_1 \right] w(x_2 - t_2) dt_2$$

e.g. Gaussfilter

- DFT / Inverse DFT eines n-dimensionalen Vektors f

$$\tilde{f}_k = \sum_{m=0}^{n-1} f_m \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{mk}{n}}$$

$$f_m = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}_k \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{mk}{n}}$$

- Es gilt der Faltungssatz: $\widetilde{(f * g)} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}; \quad \tilde{f} * \tilde{g} = n \widetilde{(f \cdot g)}$
- Bildkompression: jpg (verwendet reelle Variante, sog. DCT)
- Schnelle Berechnung mit „**Fast Fourier Transform**“ (FFT)
Komplexität : $O(n \log(n))$! (Cooley & Tukey 1965)
- In Verbindung mit dem Faltungssatz erlaubt dies die effiziente Berechnung der Faltung (Filterung)!

- Falten
 - ▶ kontinuierlich
 - ▶ diskret: Filtern
 - ★ separierbare – nicht separierbare Filterkerne
- kont. Fourier-Transformation
 - ▶ Dirac Funktion
 - ▶ Faltungssatz
 - ▶ Abtast-Theorem (Nyquist-Shannon)
- Aliasing – Anti-Aliasing
 - ▶ Vor dem Abtasten die hohen Frequenzen entfernen
im Frequenzraum: Multiplikation mit χ -Funktion
im Ortsraum: Faltung mit sinc-Function