

Mathematik für Ingenieure C4: INF

5. Übung

14.05. - 18.05.2016
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 33:

(10 Punkte)

- a) Gegeben sei die Menge $G \subset \mathbb{R}^2$, die durch die Mengen

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^{-1}\}$$

begrenzt wird.

- i) Skizzieren Sie die Menge G .
- ii) Stellen Sie die Menge G als Vereinigung zweier x_2 -projizierbarer Mengen dar.
- b) Mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c > 0$ seien die Fläche einer Ellipse $G \subset \mathbb{R}^2$ und einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt gegeben:

$$G = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad \text{und} \quad f(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

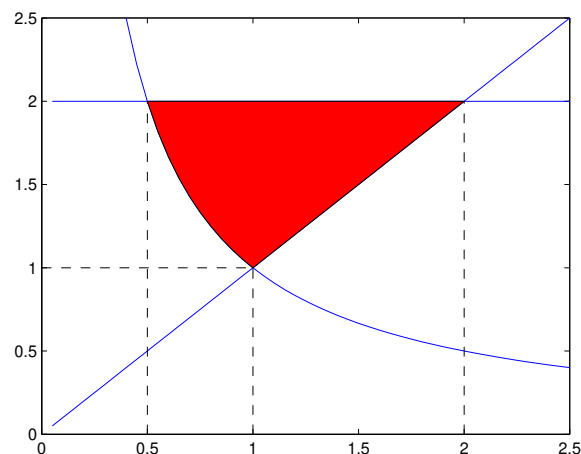
Berechnen Sie das Integral

$$\int_G f(x, y) \, d(x, y)$$

mit Hilfe der Transformationsformel.

Lösung.

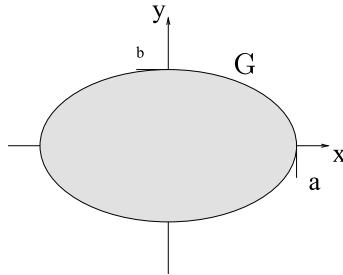
- a) Skizze der Menge G :



Skizziert man sich die Menge G (siehe oben), so ist zu erkennen, dass man G als Vereinigung zweier

x_2 -projizierbarer Mengen G_1 und G_2 schreiben kann mit $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, \frac{1}{x_1} \leq x_2 \leq 2 \right\} \\ G_2 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1 \leq 2, x_1 \leq x_2 \leq 2 \right\} \end{aligned}$$



b) Die Menge G beschreibt die Fläche einer Ellipse (siehe unten). Wir betrachten daher das Rechteck

$$H :=]0, 1[\times]0, 2\pi[$$

und die modifizierte Transformation in Polarkoordinaten

$$\Phi : H \rightarrow G, \quad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar \cos \varphi \\ br \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det(D\Phi(r, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{pmatrix} = abr(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = abr$$

und

$$f(\Phi(r, \varphi)) = c \sqrt{1 - \frac{a^2 r^2 \cos^2(\varphi)}{a^2} - \frac{b^2 r^2 \sin^2(\varphi)}{b^2}} = c \sqrt{1 - r^2}.$$

Mit der Transformationsformel erhält man also:

$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) \, d(x, y) &= \int_H f(\Phi(r, \varphi)) \, abr \, d(r, \varphi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} c \sqrt{1 - r^2} \, abr \, d\varphi \, dr \\ &= abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 - r^2} \, d\varphi \, dr = 2\pi abc \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} \, dr = 2\pi abc \left[-\frac{2}{6} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

□

Hausaufgabe 34:**(6 Punkte)**

Betrachten Sie wieder den Bogenschützen aus Hausaufgabe 11b). Die bivariate Verteilung der stetigen Zufallsvariablen X und Y zum Merkmal $(x, y) \in \Omega$ (Trefferpunkt auf der Zielscheibe) sei hierbei durch die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2}}\right)^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) 1_{\Omega}(x, y)$$

gegeben. Beim Treffen des Mittelpunkts der Zielscheibe ist der Bogenschütze also sehr geübt!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$, wobei die Ereignisse A, B wie in Hausaufgabe 11b) gegeben sind.

Hinweis. Die Transformationsformel ist hierbei sehr nützlich!

Lösung.

□

Lösungen

1

Gesucht: $P(A)$ und $P(B)$, wobei

$$A = \{x \in \mathcal{R} \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\} \text{ und}$$

$$B = \{x \in \mathcal{R} \mid x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}$$

$$\text{mit } \mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq r\}.$$

Dazu:

- Die Menge A beschreibt einen Kreis in der Ebene mit Radius kleiner 1. Betrachte daher das Rechteck

$$H =]0, 1[\times]0, 2\pi[$$

und die Transformation in Polarkoordinaten

$$\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \phi: H \rightarrow A$$

Es folgt (setze $c := (1 - e^{-\frac{r^2}{2}})^{-1}$)

$$P(A) = c \cdot \int_A f_{X,Y}(x,y) d(x,y)$$

$$= c \cdot \int_A \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) d(x,y) \quad \text{Weil}$$

$$\int_{\Gamma=0}^1 c \cdot \int_H \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \varphi\right) \cdot r \, d(r, \varphi)$$

\uparrow
 $\det(D\phi(r, \varphi)) = r$

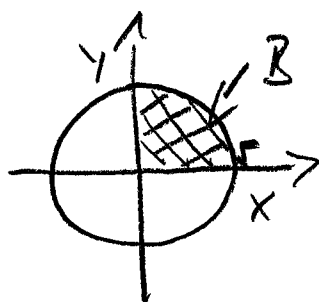
$$= c \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r \, d\varphi \, dr$$

$$= c \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \cdot r \, dr = c \cdot \left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right) \Big|_{r=0}^1$$

$$= \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}}$$

③

Die Menge B beschreibt das rechte obere Viertel eines Kreises mit Radius r .



Betrachte daher das Rechteck

$$H =]0, r[\times]0, \frac{\pi}{2}[$$

und die Transformation in Polarkoordinaten

$$\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \phi: H \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Es folgt (setze $c = (1 - e^{-\frac{1}{2}r^2})^{-1}$) // 3

$$P(B) = c \cdot \int_{\mathbb{R}^2} f_{x,y}(x,y) d(x,y)$$

$$= c \cdot \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2) d(x,y)$$

Trick $c \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}t^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}t^2 \sin^2 \varphi) \cdot t d\varphi dt$

$$= c \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}t^2) \cdot t d\varphi dt$$

$$= c \cdot \int_0^r \frac{1}{4} \exp(-\frac{1}{2}t^2) t dt$$

$$= c \cdot \frac{1}{4} \left(-e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \Big|_{t=0}^r$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}}{1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}} = \frac{1}{4} \quad (3) \quad (\text{wie zu erwarten war})$$

Bem:

Für $r=2$ ergibt sich in a): $P(A) \approx 0.455$

Für $r=3$ ————— " ————— : $P(A) \approx 0.398$

Für $r=4$ ————— " ————— : $P(A) \approx 0.394$

Hausaufgabe 35:**(4 Punkte)**

Es seien X und Y stetige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4} & \text{falls } |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1, \\ 0 & \text{falls } x,y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

eine gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y ist. Berechnen Sie weiter die Randdichte von X .

Lösung.

□

zz.: $f_{X,Y}$ ist Dichte der Zufallsvariablen X und Y , d.h. zeige:

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ und}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) d(x,y) = 1$$

Bew.: Offenbar ist $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. ①

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) d(x,y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{4} dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y \cdot \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=-1}^1 dy$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dy = \left. \frac{1}{2}y \right|_{y=-1}^1 = 1 \quad \text{②}$$

□

Randdichte von X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1+xy}{4} dy$$

$$= \left[\frac{1}{4}y + \frac{x}{8}y^2 \right]_{y=-1}^1 = \frac{1}{2} \quad \text{③}$$

Bergaufgabe 36:**(keine Punkte)**

Eine Brauerei beliefert schon seit Jahren die Bergkirchweih in Erlangen. Der Brauerei ist bekannt, dass 92% der abgefüllten Fässer dem Reinheitsgebot entsprechen. Eine Qualitätskontrolle innerhalb der Brauerei lässt ein Bierfass, welches dem Reinheitsgebot entspricht, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.97, und ein Bierfass, welches dem Reinheitsgebot nicht entspricht, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 ausliefern.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das abgefüllte Bier auf der Bergkirchweih auch wirklich dem Reinheitsgebot entspricht?

Lösung.

Wir führen die Ereignisse ein:

A : Bierfass entspricht dem Reinheitsgebot

B : Bierfass durchläuft die Qualitätskontrolle

Es ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.92$, $P(A^c) = 0.08$ und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A) = 0.97$ und $P(B|A^c) = 0.05$.

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$.

Nach der *Formel von Bayes* ergibt sich

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)},$$

wobei die bisher unbekannte Wahrscheinlichkeit $P(B)$ noch zu bestimmen ist.

Die *Formel der totalen Wahrscheinlichkeit* liefert

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c) = 0.97 \cdot 0.92 + 0.05 \cdot 0.08 = 0.8964.$$

Damit ergibt sich also:

$$P(A|B) = \frac{0.97 \cdot 0.92}{0.8964} \approx 0.9955.$$

□

Zusatzaufgabe 37:**(keine Punkte)**

Es seien $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < R_2 < R_1$ und eine Kreisscheibe $K \subset \mathbb{R}^3$ in der (x, z) -Ebene um den Punkt $(R_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ mit Radius R_2 gegeben (siehe Abb.1, Bild links). Der Torus $T \subset \mathbb{R}^3$ entsteht durch Drehung von K um die z -Achse (siehe Abb.1, Bild rechts). Mit dem Quader

$$H :=]0, R_2[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$$

und der Transformation

$$\Phi : H \rightarrow T, \quad \Phi(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} (R_1 + r \cos \theta) \cos \varphi \\ (R_1 + r \cos \theta) \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

kann T in “Toruskordinaten” transformiert werden.

Berechnen Sie das Volumen

$$\text{Vol}(T) = \int_T 1 \, d(x, y, z)$$

von T mit Hilfe der Transformationsformel.

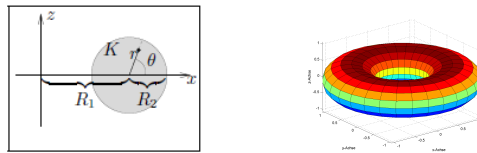


Abbildung 1: Illustrationen der Kreisscheibe K (links) und des Torus T (rechts)

Hinweis. Transformationsformel in \mathbb{R}^3 siehe auch Formelsammlung.

Lösung.

Wir möchten das Volumen des Torus T ,

$$\text{Vol}(T) \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_T 1 \, d(x, y, z),$$

mittels der Transformationsformel berechnen.

Für die Determinante der Transformation in “Toruskordinaten” erhält man:

$$\begin{aligned} \det(D\Phi(r, \varphi, \theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -(R_1 + r \cos(\theta)) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & (R_1 + r \cos(\theta)) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Entw.n.3Z}}{=} \sin(\theta) (r(R_1 + r \cos(\theta)) \sin(\theta) \sin^2(\varphi) + r(R_1 + r \cos(\theta)) \sin(\theta) \cos^2(\varphi)) \\ &\quad + r \cos(\theta) ((R_1 + r \cos(\theta)) \cos(\theta) \cos^2(\varphi) + (R_1 + r \cos(\theta)) \cos(\theta) \sin^2(\varphi)) \\ &= r(R_1 + r \cos(\theta)) \sin^2(\theta) (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) + r(R_1 + r \cos(\theta)) \cos^2(\theta) (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= r(R_1 + r \cos(\theta)) (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = rR_1 + r^2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel erhält man also:

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(T) &= \int_H |rR_1 + r^2 \cos \theta| \, d(r, \varphi, \theta) = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |rR_1 + r^2 \cos \theta| \, d\varphi \, d\theta \, dr \\
&\quad (\text{Der Integrand ist nicht-negativ, weil } 0 \leq r < R_2 < R_1 \text{ und } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ gilt.}) \\
&= \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (rR_1 + r^2 \cos \theta) \, d\varphi \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} (rR_1 + r^2 \cos \theta) \, d\theta \, dr \\
&= 2\pi \int_0^{R_2} \left(2\pi rR_1 + [r^2 \sin \theta]_{\theta=0}^{2\pi} \right) \, dr = 4\pi^2 R_1 \int_0^{R_2} r \, dr = 4\pi^2 R_1 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{R_2} \\
&= 2\pi^2 R_1 R_2^2.
\end{aligned}$$

□