

Mathematik für Ingenieure C4: INF

8. Übung

11.06. - 15.06.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 55:

(12 Punkte)

Es sei X eine ZV mit Werten in $\{0, 1, c\}$ für ein $c > 1$ und Y sei eine ZV mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$. Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung

$$f^{(X,Y)}(i, j) = P(X = i, Y = j)$$

des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte

$$(i, j) \in \{(0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (c, -1), (c, 0), (c, 1)\}$$

an:

$Y \quad X$	$i = 0$	$i = 1$	$i = c$
$j = -1$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$j = 0$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- Berechnen Sie die Randverteilung von X und den Erwartungswert EX . Für welche c gilt $EX = 1$?
- Berechnen Sie $P(Y > 0 | X > 0)$.
- Betrachten Sie die Zufallsvariable $Z = X \cdot Y$. Berechnen Sie EZ und $\text{Var}(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2$. Für welche c gilt $\text{Var}(Z) = 1$?
- Sei $EY = -\frac{1}{6}$. Ergänzen Sie unter dieser Vorgabe die fehlenden Werte der Tabelle.
- Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y . Für welche c sind X und Y unkorreliert?

Lösung.

□

Lösungen

11

$$(a) \cdot P(X=1) = \sum_{y \in \{-1, 0, 1\}} f^{(X,Y)}(1, y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\cdot P(X=c) = \sum_{y \in \{-1, 0, 1\}} f^{(X,Y)}(c, y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\cdot P(X=0) = 1 - (P(X=1) + P(X=c)) \\ = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

②
für die
Randverteilung

$$\cdot E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + c \cdot P(X=c) \\ = 0 + \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{4} = \frac{2+c}{4} \quad (1)$$

Für welche $c > 1$ gilt $E(X) = 1$?

$$E(X) = 1 \Leftrightarrow \frac{2+c}{4} = 1 \Leftrightarrow c = 2 \quad (1)$$

$$(b) \cdot P(Y > 0 | X > 0) = \frac{P(X > 0, Y > 0)}{P(X > 0)} \\ = \frac{P(X=1, Y=1) + P(X=c, Y=1)}{P(X=1) + P(X=c)} \\ = \frac{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad E(Z) &= E(X \cdot Y) = \sum_{i,j: f(i,j) > 0} i \cdot j \cdot f(i,j) \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - c \cdot \frac{1}{12} + c \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{6} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Für welche $c > 1$ gilt $\text{Var}(Z) = 1$?

Zur Vorbereitung:

$$\begin{aligned}
 E(Z^2) &= E(X^2 Y^2) = \sum_{i,j: f(i,j) > 0} i^2 \cdot j^2 \cdot f(i,j) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + c^2 \cdot \frac{1}{12} + c^2 \cdot \frac{1}{12} \\
 &= \frac{1}{6} c^2 + \frac{1}{3} = \frac{c^2 + 2}{6} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Jetzt:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z) &= E(Z^2) - (E Z)^2 = \frac{c^2 + 2}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{6} \left(c^2 + 2 - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} \left(c^2 + \frac{11}{6} \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Z) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{6} \left(c^2 + \frac{11}{6} \right) = 1 \\
 \Leftrightarrow c^2 &= \frac{25}{6} \Leftrightarrow c = \frac{5}{\sqrt{6}} \quad (1) \\
 &\quad \uparrow c > 1
 \end{aligned}$$

d) Nach Voraussetzung:

$$-\frac{1}{6} = E(Y) \stackrel{Vf.}{=} -1 \cdot P(Y=-1) + \underbrace{0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow P(Y=-1) = \frac{1}{6} + P(Y=1)$$

Randverteilung von Y \Rightarrow $\frac{1}{6} + \sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(0,-1) + \sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(1,-1) + \sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(c,-1)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \quad (1)$$

Jetzt:

$$\underbrace{P(X=0, Y=-1)}_{= \sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(0,-1)} = P(Y=-1) - \sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(1,-1) - \sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(c,-1)$$

\uparrow Randverteilung von Y , umstellen

$$= \frac{5}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Wegen $1 = \sum_{\substack{i \in \{0,1,c\} \\ j \in \{-1,0,1\}}} \sum_{(i,j)} f^{(X,Y)}(i,j)$ folgt

$$\sum_{(X,Y)} f^{(X,Y)}(0,0) = \frac{1}{12} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} e) \text{ Kov}(X,Y) &= E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = -\frac{1}{6} - \left(\frac{2+c}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}c\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Wähle $c > 1$ mit

$$\text{Kov}(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot c \Leftrightarrow c = 2 \quad (1)$$

Hausaufgabe 56:**(8 Punkte)**

Es seien $X \sim \text{Exp}(1)$ und $Y \sim \text{Exp}(2)$ stochastisch unabhängig. Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen U und V mit

$$U = 2X + 3Y \quad \text{und} \quad V = 3X - Y.$$

Lösung.

□

Lösung

1

$$X \sim \text{Exp}(1), Y \sim \text{Exp}(2)$$

stochastisch unabhängig (siehe Aufgabenstellung)

Betrachte weiter

$$U = 2X + 3Y$$

$$V = 3X - Y$$

- Kovarianz von U und V :

$$\text{Kov}(U, V) = \frac{1}{2} \text{Var}(U+V) - \frac{1}{2} \text{Var}(U)$$

$$- \frac{1}{2} \text{Var}(V) = \frac{1}{2} \text{Var}(5X + 2Y)$$

$$- \frac{1}{2} \text{Var}(2X + 3Y) - \frac{1}{2} \text{Var}(3X - Y)$$

$$= \frac{1}{2} \left(25 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(4 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{1}{4} \right)$$

\downarrow X, Y stoch. unabh.

$$- \frac{1}{2} \left(9 \cdot 1 + \frac{1}{4} \right)$$

$$= 13 - \frac{25}{8} - \frac{37}{8} = \frac{21}{4}$$

④

• Korrelationskoeffizient von U und V:

11

Zunächst

$$\text{Var}(U) = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \quad (1)$$

↑ siehe oben

$$\text{Var}(V) = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4} \quad (1)$$

↑ siehe oben

$$\Rightarrow \text{Korr}(U, V) = \frac{\text{Kov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U) \cdot \text{Var}(V)}} \quad (1)$$

$$= \frac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{21}{5 \cdot \sqrt{37}} \quad (1)$$

- Gegeben sei die Messreihe $\mathbf{x} = (5, 3, 6, 1)$. Bestimmen Sie die Werte:

$$u_{0,5} = \boxed{}, \quad u_{0,75} - u_{0,25} = \boxed{}$$

$$\bar{x} = \boxed{}.$$

- Eine gegebene Messreihe bestehe aus $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) Daten. Geben Sie eine Formel für den Median an:

--

- Ein Zufallsexperiment mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ verschiedenen Ausprägungen wird n -mal wiederholt ($n \gg k$, $n \in \mathbb{N}$). Geben Sie einen Zusammenhang zwischen den relativen Häufigkeiten $h_n(j)$ und den absoluten Häufigkeiten $H_n(j)$ für $j = 1, \dots, k$ an:

--

- Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k \mapsto \frac{C}{4^k}$ und $C \in \mathbb{R}$. Für welche C ist f eine

Z-Dichte? $C =$.

- Seien X und Y stochastisch unabhängig. Dann ist

$$P^{(X+Y)}(X+Y \leq z) =$$

- (Ω, \mathcal{A}, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsmodell und es seien $A, B, C, D \subset \Omega$. Geben Sie Formeln zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

$$P(A + B) = \boxed{}$$

$$P(C \cup D) =$$

- X und Y seien stochastisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}^+$. Geben Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Werte $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y, \mathbb{E}X^2$ und $\mathbb{E}Y^2$ an (alle Werte seien

als endlich vorausgesetzt):

$$E(aX - bY) = \boxed{},$$

$$\text{Var}(aX - bY) = \boxed{},$$

$$\text{Kov}(X,Y) = \boxed{},$$

$$\text{Kov}(X + Y, X) = \boxed{}.$$

- Gegeben sei die Abbildung $f^{(X,Y)} : [-2, -1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^\top \mapsto \frac{C}{x^2 y^2}$ und $C \in \mathbb{R}$.

– Für welche C ist $f^{(X,Y)}$ eine W-Dichte? $C =$.

$$-f^X(x) = \boxed{}, f^Y(y) = \boxed{},$$

$$- \text{Kov}(X,Y) =$$

- Sei X eine ZV mit der R-Dichte f^X . Dann gilt:

$$- P(a \leq x \leq b) = \boxed{},$$

$$-f^X(x) \in \boxed{\phantom{\mathbb{R}}} \subsetneq \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$- F^X(x) := \boxed{} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$-F^X(x) \in \boxed{\phantom{\mathbb{R}}} \subsetneq \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Gegeben seien ein W-Modell (Ω, \mathcal{A}, P) und die Ereignisse A und B mit $A \supset B$. Dann gilt für $P(A)$ und $P(B)$ das Verhältnis

- Wie ist der Binomialkoeffizient $\binom{a}{b}$ für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$ definiert?

Zusatzaufgabe 58:

(keine Punkte)

- a) Sei $X \sim \pi(\lambda)$ mit $P(X = 0) = 0.5$. Wie groß ist $E(X)$?
- b) Sei $X \sim B(10, 0.3)$. Bestimmen Sie $P(X < E(X) - 2 \text{Var}(X))$.
- c) Sei $X \sim B(n, p)$ mit $E(X) = 5$ und $\text{Var}(X) = 4$. Berechnen Sie n und p .
- d) Sei X eine gleichverteilte ZV mit Erwartungswert 1 und Varianz $\frac{4}{3}$. Berechnen Sie $P(X < 0)$.

Lösung.

□

(a) $X \sim \pi(\lambda)$ mit $P(X=0) = \frac{1}{2}$

Gesucht: $E(X)$

Es gilt

$$\frac{1}{2} = P(X=0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = E(X)$$

$$\uparrow E(X) = \lambda, \text{ da } X \sim \pi(\lambda)$$

(b) $X \sim \mathbb{B}(n, p)$ mit $n=10$ und $p = \frac{3}{10}$

$$\Rightarrow E(X) = n \cdot p \text{ und } \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Somit ist

$$P(X < E(X) - 2 \cdot \text{Var}(X))$$

$$= P(X < n \cdot p - 2n \cdot p \cdot (1-p))$$

$$= P(X < n \cdot p \cdot (2p - 1))$$

$$= P(X < 3 \cdot \underbrace{\left(-\frac{4}{10}\right)}_{< 0}) = 0$$

$$\uparrow n=10, p=\frac{3}{10}$$

c) $X \sim \mathbb{B}(n, p)$ mit $E(X) = 5$ und
 $Var(X) = 4$. Dann gilt.

$$\Leftrightarrow np = 5 \wedge np(1-p) = 4$$

$$\Leftrightarrow np = 5 \wedge 5(1-p) = 4$$

$$\Leftrightarrow np = 5 \wedge p = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow n = 25 \wedge p = \frac{1}{5} = 0.2$$

d) $X \sim \mathbb{U}(a, b)$ mit $E(X) = 1$, $Var(X) = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \wedge \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\uparrow E(X) = \frac{a+b}{2}, Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\Rightarrow a+b = 2 \wedge b-a = 4$$

\uparrow Es muss $b > a$ sein

$$\Rightarrow a = -1 \wedge b = 3$$

So mit gilt:

$$P(X < 0) = \int_{-1}^0 \frac{1}{3-(-1)} dx = \frac{1}{4}$$

Zusatzaufgabe 59:**(keine Punkte)**

Die Körpergröße eines zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgers ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 180 (cm) und Streuung 10 (cm).

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 50 von 300 zufällig ausgewählten Männern größer als 190 cm?

Lösung.

$X_i \triangleq$ Körpergröße eines männlichen Bundesbürgers

Nach Aufgabengstellung ist

$$X_i \sim \mathcal{N}(180, 100)$$

Betrachte zunächst die W'Fkt., dass ein zufällig ausgewählter Mann größer als 190 cm ist:

$$\begin{aligned} P(X_i > 190) &= 1 - P(X_i \leq 190) = 1 - \Phi\left(\frac{190 - 180}{10}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) = 0,1587. \end{aligned}$$

Betrachte nun neue ZV:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i\text{-ter Mann größer als } 190 \text{ cm} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\text{d.h. } Y_i \sim \mathbb{I}(1, 0,1587)$$

Setze

$$Y := \sum_{i=1}^{300} Y_i \triangleq \text{Anzahl unter 300 Männern, die größer als 190 cm sind.}$$

Es gilt:

$$Y \sim \mathbb{B}(300, 0,1587)$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt

~~K²~~

$$P(Y > 50) = 1 - P(Y \leq 50)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{50 - 47.61}{\sqrt{40.05}}\right)$$

$$\uparrow E(Y) = 200 \cdot 0.1587 = 47.61$$

$$\text{Var}(Y) = 47.61 \cdot 0.8413 = 40.05$$

$$= 1 - \Phi(0.38) = 0.3520$$