

# Mathematik für Ingenieure C4: INF

## 12. Übung

09.07. - 13.07.2018  
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann  
Dr. Lukas Pflug  
Department Mathematik  
Universität Erlangen-Nürnberg

### Präsenzaufgabe 79:

Die Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig identisch Poisson verteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ .

Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\lambda$ . Ist der ML-Schätzer erwartungstreu?

### Präsenzaufgabe 80:

Eine in einer Brauerei zur Abfüllung von Flaschen eingesetzte Maschine ist auf den Normwert 0,33l eingestellt. Bei der Messung der Biermengen in 9 abgefüllten Flaschen ergaben sich folgende Werte (in Liter):

0,329; 0,339; 0,331; 0,324; 0,328; 0,327; 0,334; 0,336; 0,326

Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Messwerte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen, die Konfidenzintervalle für den Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  zum Niveau  $1 - \alpha = 0,95$ .

### Präsenzaufgabe 81:

Mit einem Entfernungsmesser wurde eine Strecke 17 mal unabhängig voneinander gemessen (in m):

214,3	215,1	215,6	214,7	215,3
214,8	215,7	214,8	214,4	215,3
214,7	215,2	215,8	215,3	214,6
214,6	214,8			

Es sei bekannt, dass die Messgröße normalverteilt ist. Aus der Erfahrung sei weiterhin bekannt, dass die Varianz  $\sigma^2 = 2$  ist. Bestimmen Sie für den Erwartungswert  $\mu$  Konfidenzintervalle zum Niveau  $1 - \alpha = 0,9$  bzw.  $1 - \alpha = 0,98$ .

### Zusatzaufgabe 82:

(keine Punkte)

Die Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit Randdichte

$$f^{X_i}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$$

mit unbekannten Parameteren  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma^2 \in (0, \infty)$ .

- Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parametervektor  $(\mu, \sigma^2)^T$ .
- Modifizieren Sie den ML-Schätzer für  $\sigma^2$ , so dass dieser erwartungstreu für  $\sigma^2$  ist.

### Zusatzaufgabe 83:

(keine Punkte)

Die Dauer eines Vorgangs sei zwischen 0 und  $\vartheta$  stetig gleichverteilt. Von  $\vartheta$  ist nur bekannt, dass es größer als 0 ist. Weiter sei  $X_1, \dots, X_n$  eine mathematische Stichprobe.

Überprüfen Sie, ob die Schätzfunktion

$$\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

- erwartungstreu ist für  $\vartheta$ .
- asymptotisch erwartungstreu ist für  $\vartheta$ .
- konsistent ist für  $\vartheta$ .

**Hinweis.** Die Dichte der Zufallsvariablen  $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$  ist

$$f^{\hat{\vartheta}}(x) = \frac{n}{\vartheta^n} x^{n-1} 1_{(0, \vartheta)}(x).$$

Können Sie die Dichte von  $\hat{\vartheta}$  herleiten?

### Zusatzaufgabe 84:

(keine Punkte)

Man zeige: Die Höhe eines festen Punktes der Lauffläche eines Rades (mit Durchmesser 1) über der Straße zu einem zufälligen Zeitpunkt ist  $\text{Be}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -verteilt. (Der Drehwinkel des Rades sei dabei  $\mathcal{R}(0, 2\pi)$ -verteilt.)