

Mathematik für Ingenieure C4: INF

3. Übung

30.04. - 04.05.2016
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Präsenzaufgabe 15:

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- a) Ist $P(A) = 0$, so ist $P(A \cap B) = 0$.
- b) Sind $P(A) = \frac{1}{2}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$, so sind A und B disjunkt.
- c) Ist $P(A) = P(B^c)$, so ist $A^c = B$.

Präsenzaufgabe 16:

Bei einer Lotterie werde eine vierstellige Losnummer auf die folgende Weise ermittelt: In einer Trommel befinden sich 40 mit den Ziffern $0, 1, \dots, 9$ versehene Kugeln, wobei jeweils 4 Kugeln die gleiche Ziffer tragen. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung nebeneinandergelegt. Die 4 Ziffern auf den gezogenen Kugeln ergeben dann die Losnummer.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- a) Die Losnummer 3494 wird gezogen.
- b) Es wird eine Losnummer gezogen, in der nur die Ziffern 1 und 7 vorkommen (beide Ziffern sollen vorkommen.)
- c) Es wird eine Losnummer gezogen, die aus 4 verschiedenen Ziffern besteht.

Präsenzaufgabe 17:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine symptomfreie Frau einer gewissen Altersgruppe Brustkrebs hat beträgt 1%. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Krankheit mit einer Mammographie erkannt wird beträgt 80%. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Krankheit mit Mammographie irrtümlich diagnostiziert wird, obwohl sie gar nicht vorliegt ist 9.6%. Wenn nun eine symptomfreie Frau dieser Altersgruppe bei einer Routineuntersuchung einen positiven Mammographiebefund erhält, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass bei ihr tatsächlich Brustkrebs vorliegt?

Bemerkung. 95 von 100 Ärzten schätzten, dass die Wahrscheinlichkeit zwischen 70% und 80% liegt.

Hausaufgabe 18:

(8 Punkte)

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$.

- a) Seien A und B stochastisch unabhängig. Zeigen Sie, dass A^c und B stochastisch unabhängig sind.
- b) Seien A, B und C stochastisch unabhängig. Zeigen Sie, dass A^c, B^c und C stochastisch unabhängig sind.

Hausaufgabe 19:

(4 Punkte)

Ein Medikament in Tablettenform zeigt unabhängig voneinander zwei Wirkungen: die nicht sofort erkennbare Heilwirkung A mit Wahrscheinlichkeit 80% und die sofort erkennbare Nebenwirkung B mit Wahrscheinlichkeit 30%. Durch ein Versehen bei der Herstellung haben 1% der Tabletten eine (falsche) Dosierung mit Wahrscheinlichkeit 20% für A und mit Wahrscheinlichkeit 50% für B . Diese Tabletten sind äußerlich nicht feststellbar.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Heilwirkung eintritt unter der Bedingung, dass

- a) die Nebenwirkung eintritt.
- b) die Nebenwirkung ausbleibt.

Hinweis. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\cdot | B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ist ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Hausaufgabe 20:

(8 Punkte)

Glücksspirale der Olympialotterie 1971: In einer Trommel befinden sich 70 mit den Ziffern $0, 1, \dots, 9$ versehene Kugeln, wobei jeweils 7 Kugeln die gleiche Ziffer tragen. Es werden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung nebeneinandergelegt. Die 7 Ziffern auf den gezogenen Kugeln ergeben dann die Losnummer.

- Geben Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
- Hat bei dieser Lotterie jedes Los die gleiche Chance?
- Kann das Zufallsexperiment so verändert werden, dass jedes Los mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewinnt?

Zusatzaufgabe 21:

(keine Punkte)

Eine Anwendung des Satzes von Bayes ist der Bayes-Spamfilter. Dieser Spamfilter geht bei der Selektion von Spam aus einem Email-Postfach allein von der statistischen Wahrscheinlichkeit aus, mit der die in einer Email (Betreffzeile) vorkommenden Worte bisher in Spam-Mails bzw. in erwünschten Mails vorkamen. Dadurch, dass der Bayes-Spamfilter somit seine Wahrscheinlichkeiten aus vergangenen Emails „lernt“, unterscheidet er sich von anderen Spamfiltern, die zur Erkennung von Spam nur auf feststehende „schwarze“ oder „weiße Listen“ zurückgreifen. Das Eintreffen einer neuen Email wird als Zufallsexperiment mit den beiden möglichen Ereignissen

- S : Email ist Spam
- S^c : Email ist erwünscht

betrachtet. Der Bayes-Spamfilter zerlegt die Betreffzeile der Email in einzelne Worte W_1, \dots, W_n und bestimmt die Spam-Wahrscheinlichkeit als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(S|W_1, \dots, W_n)$. Falls diese Wahrscheinlichkeit oberhalb eines Grenzwertes von 0.9 liegt, wird die Email als Spam klassifiziert, ansonsten nicht. Im Folgenden wird die stark vereinfachte Situation betrachtet, dass nur ein bestimmtes Wort analysiert wird:

In einer neu eintreffenden Email kommt das Wort W_1 „Kontoinformation“ vor. Unserem Spamfilter liegen 300 Emails, darunter 200 Spams zur Analyse vor. In 40% aller Spams kam bisher „Kontoinformation“ vor, aber auch in einer erwünschten Email von einem Freund („Nerviger Kontoinformation-Spam“). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Spam-Email handelt unter der Bedingung, dass die Betreffzeile der Email das Wort „Kontoinformation“ enthält.

Zusatzaufgabe 22:

(keine Punkte)

Die Gentlemen A und B tragen ein Duell aus, bei dem abwechselnd der eine auf den anderen schießt, bis einer trifft. Beide Gentlemen haben sich im Vorfeld darauf einigen können, dass B anfängt.

Betrachten Sie nun für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ereignisse

$$\begin{aligned} B_{2n-1} &: B \text{ trifft im } (2n-1)\text{-ten Schuss.} \\ A_{2n} &: A \text{ trifft im } 2n\text{-ten Schuss.} \end{aligned}$$

Es gelte

$$P(B_{2n-1} | B_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap B_{2n-3}^c \cap A_{2n-2}^c) = p_b \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$P(A_{2n} | B_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap B_{2n-2}^c \cap A_{2n-1}^c) = p_a \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die kaltblütigen Gentlemen werden also nicht nervös und lernen auch nicht dazu!

Zeigen Sie, dass das Duell mit Wahrscheinlichkeit 1 beendet wird.

Hinweis.

- Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass das Duell nach n Schüssen beendet ist.

- Es gilt die folgende Verallgemeinerung der Kettenregel:

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$.

Dann gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \prod_{l=2}^n P\left(A_l \mid \bigcap_{i=1}^{l-1} A_i\right)$$

Abgabe der Hausaufgaben am 11.05.2016 bis 10 Uhr in den Briefkasten 7.1 oder 7.2 „Mathe f. Ingenieure, Dozent: Rathmann“.