

Mathematik für Ingenieure C4: INF

7. Übung

04.06. - 08.06.2016
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 47:

(10 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und $\mathcal{R}(a, b)$ -verteilt. Bestimmen Sie die Dichte der Summe der Zufallsvariablen und skizzieren Sie diese.

Lösung.

X ist gleichverteilt auf (a, b) , d.h. $f^X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$.

Y ist gleichverteilt auf (a, b) , d.h. $f^Y(y) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(y)$.

Somit gilt für alle $z = x + y \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} f^{X+Y}(z) &= (f^X * f^Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^X(x) \cdot f^Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(x) \cdot \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(z-x) dx = \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(a,b)}(x) \cdot \mathbf{1}_{(z-a, z-b)}(x) dx = \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(a,b) \cap (z-b, z-a)}(x) dx = \\ &\stackrel{(2)}{=} \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(a, z-a)}(x) dx = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^{z-a} dx = \frac{1}{(b-a)^2} [x]_a^{z-a} = \frac{z-2a}{(b-a)^2} & z \in (2a, a+b), \\ \frac{1}{(b-a)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(z-b, b)}(x) dx = \frac{1}{(b-a)^2} \int_{z-b}^b dx = \frac{1}{(b-a)^2} [x]_{z-b}^b = \frac{2b-z}{(b-a)^2} & z \in [a+b, 2b). \end{cases} \end{aligned}$$

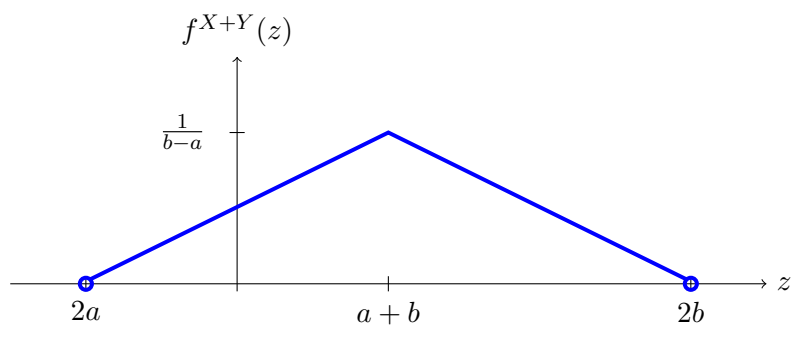
(1): Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{(a,b)}(z-x)$ ist genau dann ungleich 0, wenn

$$a < z-x < b \iff a-z < -x < b-z \iff z-b < x < z-a.$$

Folglich gilt $\mathbf{1}_{(a,b)}(z-x) \iff \mathbf{1}_{(z-b, z-a)}(x)$.

(2): Für $z \in (2a, a+b)$ gilt: $(a, b) \cap (z-b, z-a) = (a, z-a)$.

Für $z \in [a+b, 2b)$ gilt: $(a, b) \cap (z-b, z-a) = (z-b, b)$.



□

Hausaufgabe 48:**(10 Punkte)**

Die in Prozent pro Jahr gemessenen Renditen zweier Wertpapiere verhalten sich wie zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen X und Y mit

$$\begin{aligned} E(X) &= 10 & \text{und} & & \text{Var}(X) &= 225, \\ E(Y) &= 8 & \text{und} & & \text{Var}(Y) &= 100. \end{aligned}$$

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das erste Papier X eine höhere Rendite als das zweite Y ?
- b) Angenommen, jemand investiert 100 Euro in das erste Papier X und 200 Euro in das zweite Y ($\hat{=}$ Gesamtportfolio). Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Gesamtportfolio eine Jahresrendite von mehr als 10%?

Hinweis. Benutzen Sie bitte die Approximation $18 \approx \sqrt{325}$ und bearbeiten Sie die Aufgabe ohne elektronische Hilfsmittel mittels der Tabelle für die Standardnormalverteilung.

Lösung.

□

Lösungen

1

Es ist

$$X \sim N(10, 225) \text{ und } Y \sim N(8, 100) \quad (2)$$

Für das
richtige Ablesen
wird später
benötigt!

(a) Vorbereitung:

$$X - Y \sim N(10 - 8, 225 + 100) = N(2, 325)$$

Verteilung von $X - Y$

(2)
Für die
Verteilung

Hintergrund:

$$Z \sim N(a, s^2) \Rightarrow \mu Z + c \sim N(\mu \cdot a + c, \mu^2 \cdot s^2)$$

$$N(a, s^2) * N(b, r^2) = N(a + b, s^2 + r^2)$$

Gesucht: W' auf für $X > Y$.

Dazu:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X - Y > 0) = 1 - P(X - Y \leq 0) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{0 - 2}{\sqrt{325}}\right) = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{325}}\right) \\ &\quad \uparrow \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1}{9}\right) = \Phi(0, 1) \approx 0,5438 \quad (3)$$

(12) Gesamtportfolio: $\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y$

Vorlesung:

$$\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y \sim N\left(\underbrace{\frac{1}{3}10 + \frac{2}{3}8}_{=\frac{26}{3}}, \underbrace{\frac{1}{9}225 + \frac{4}{9}100}_{=\frac{625}{9}}\right)$$

u. Verteilung von $\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y$ ②

Gesucht: W'kt $\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y > 10$.

Dazu:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y > 10\right) &= 1 - P\left(\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y \leq 10\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10 - \frac{26}{3}}{\frac{25}{3}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{25}\right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi(0,16) \approx 1 - 0,5636$$

$$= 0,4364$$

②

Zusatzaufgabe 49:**(keine Punkte)**

Dem Zöllner OK ist zugespielt worden, dass unter den 40 Passagieren eines gerade ankommenden Fährschiffs zwei Schmuggelware mit sich führen. Wie viele der Passagiere muss er (zufällig) zur Kontrolle auswählen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 wenigstens einen der Schmuggler zu erwischen?

Lösung.

Die zufällige Auswahl von n Personen aus den $N = 40$ Personen, von denen $K = 2$ Schmuggler sind, wird durch die hypergeometrische Verteilung mit der Ergebnismenge $\Omega = \{0, 1, 2\}$ für die Anzahl der ertappten Schmuggler und der Z-Dichte

$$f(k) = \frac{\binom{2}{k} \binom{40-2}{n-k}}{\binom{40}{n}}.$$

beschrieben.

Es ist

$$X \sim H(40, 2, n).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(\{1, 2\}) &= f(1) + f(2) = \frac{\binom{2}{1} \binom{38}{n-1}}{\binom{40}{n}} + \frac{\binom{2}{2} \binom{38}{n-2}}{\binom{40}{n}} \\ &= \frac{n!(40-n)!}{40!} \left(\frac{2 \cdot 38!}{(n-1)!(38-n+1)!} + \frac{38!}{(n-2)!(38-n+2)!} \right) \\ &= \frac{38!}{40!} \left(\frac{2 \cdot n!(40-n)!}{(n-1)!(39-n)!} + \frac{n!(40-n)!}{(n-2)!(40-n)!} \right) \\ &= \frac{1}{39 \cdot 40} (2n(40-n) + n(n-1)) \\ &= \frac{1}{39 \cdot 40} (79n - n^2) \end{aligned}$$

n ist so klein wie möglich zu bestimmen, so dass noch $P(\{1, 2\}) \geq 0.9$ erfüllt ist.

Es ist

$$\frac{1}{39 \cdot 40} (79n - n^2) \geq \frac{9}{10}$$

genau dann, wenn

$$79n - n^2 \geq \frac{39 \cdot 40 \cdot 9}{10} = 1404$$

oder

$$n^2 - 79n + 1404 \leq 0.$$

Die allgemeine Lösung (n reell) der entsprechenden quadratischen Gleichung ist

$$n_{1,2} = \frac{1}{2} \left(79 \pm \sqrt{79^2 - 4 \cdot 1404} \right) = \frac{1}{2} \left(79 \pm \sqrt{625} \right) = \frac{1}{2} (79 \pm 25)$$

Im Bereich $0 \leq n \leq 40$ liegt

$$n_2 = \frac{1}{2} (79 - 25) = 27,$$

praktischerweise gleich eine ganzzahlige Lösung.

Anmerkung: Anstelle von der Bedingung $P(\{1, 2\}) \geq 0.9$ kann man auch die komplementäre Bedingung $P(\{0\}) \leq 0.1$ verwenden. Sie führt mit weniger Rechenaufwand zum selben Ergebnis.

□

Zusatzaufgabe 50:**(keine Punkte)**

Zeigen Sie dass für die Summe zweier Poisson-verteilter ZV $X_1 \sim \pi(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \pi(\lambda_2)$ gilt

$$X_1 + X_2 \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Lösung.

Lösung ist ungefähr

$$f(z) = \sum_{k=0}^z \frac{1}{k!} \lambda_1^k \frac{1}{(z-k)!} \lambda_2^{z-k} = \frac{1}{z!} \sum_{k=0}^z \frac{z!}{k!(z-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{z-k} = \frac{1}{z!} (\lambda_1 + \lambda_2)^z.$$

□

Zusatzaufgabe 51:**(keine Punkte)**

Auf dem Nürnberger Flughafen werden die zu transportierenden Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines dieser Gepäckstücke den Zielflughafen Barcelona hat, sei $p \in (0, 1)$.

- a) Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken höchstens eines den Zielflughafen Barcelona hat, sei 88.75%. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p .
- b) Nun werden 15 aufeinanderfolgende Gepäckstücke betrachtet. Bestimmen Sie für $p = 0.35$ die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
 - A : Genau fünf Gepäckstücke haben Barcelona als Ziel.
 - B : Das fünfzehnte Gepäckstück ist das fünfte nach Barcelona.
 - C : Genau fünf Gepäckstücke haben das Ziel Barcelona und liegen direkt hintereinander.
- c) Es werden 2% der Gepäckstücke fehlgeleitet, von den fehlgeleiteten haben 15% das Ziel Barcelona. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Gepäckstück, welches Barcelona als Ziel hatte, richtig weitergeleitet?

Lösung.

□

Lösungen

1

(a) X : Anzahl der Gepäckstücke,
die Barcelona erreicht

$$X \sim \mathbb{I}(2, p)$$

$$P(X \leq 1) = 0,8775 \Leftrightarrow 1 - P(X = 2) = 0,8775$$

$$\Leftrightarrow 1 - p^2 = 0,8775 \Leftrightarrow p = 0,25$$

\uparrow
 $p \in (0,1)$

$$\begin{aligned} (b) \quad P(A) &= \mathbb{I}(15; 0.35; 5) \\ &= \binom{15}{5} \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^{10} \\ &= 0.21234 \end{aligned}$$

$$P(B) = \mathbb{I}(14; 0.35; 4) = 0.07078$$

$$P(C) = 11 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^{10} = 0.00078$$

(c) P : Ein zufällig ausgewähltes
Gepäckstück hat den Zielflug-
hafen Barcelona.

\bar{F} : Ein zufällig ausgewähltes Gepäckstück
ist fehlgeleitet. //2

Nach Angabe gilt:

$$P(P) = p = 0,35$$

$$P(\bar{F}) = 0,02$$

$$P(P|\bar{F}) = 0,15$$

Gesucht: $P(\bar{F}^c | P)$

Vierfeldertafel
(NE selbst
erstellen)

	P	P^c	
\bar{F}	0,003	0,017	0,02
\bar{F}^c	0,347	0,633	0,98
	0,35	0,65	1

$$\begin{aligned}\rightarrow P(\bar{F}^c | P) &= \frac{P(P \cap \bar{F}^c)}{P(P)} = \frac{0,347}{0,35} \\ &= 0,991.\end{aligned}$$