

Mathematik für Ingenieure C4: INF

3. Übung

30.04. - 04.05.2016
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 18:

(8 Punkte)

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{A}$.

- a) Seien A und B stochastisch unabhängig. Zeigen Sie, dass A^c und B stochastisch unabhängig sind.
- b) Seien A, B und C stochastisch unabhängig. Zeigen Sie, dass A^c, B^c und C stochastisch unabhängig sind.

Lösung.

□

Lösungen

11

(a) Seien A und B stochastisch unabhängig (st.u.),
d.h. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Es gilt:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

und $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, d.h.
die Mengen $A \cap B$ und $A \cap B^c$ sind disjunkt.

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \quad (*)$$

Schließlich

$$P(A) \cdot P(B^c) = P(A) \cdot (1 - P(B))$$

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) \stackrel{\text{st.u.}}{=} P(A) - P(A \cap B)$$

$$\stackrel{(*)}{=} P(A \cap B^c)$$



③

(b) Seien A, B und C stoch. unabhängig.

$\Rightarrow A, B, C$ sind auch paarweise stoch.
unabhängig.

Nach Teilaufgabe (a) sind dann auch

A^c, C stoch. unabhängig und B^c, C stoch.
unabhängig.

④

// 2

zu zeigen bleibt somit, dass

$$(i) \quad P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

$$(iii) \quad P(A^c \cap B^c \cap C) = P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C)$$

Ad (i): Es gilt

$$A^c = (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

$$\text{und } (A^c \cap B) \cap (A^c \cap B^c) = \emptyset$$

$$\Rightarrow P(A^c) = P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c) \quad (**)$$

Somit folgt

$$P(A^c) \cdot P(B^c) = P(A^c) (1 - P(B))$$

$$= P(A^c) - P(A^c)P(B) = P(A^c) - P(A^c \cap B)$$

$$\stackrel{(**)}{=} P(A^c \cap B^c)$$

□ (i)

③

Ad (ii): Mit der Kettenregel folgt

$$P(A^c B^c C) = P(A^c) \cdot P(B^c | A^c) \cdot P(C | A^c \cap B^c)$$

$$= P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C)$$

①

↑
• A^c, B^c stoch. unabh.

• A^c, C stoch. unabh. $\Rightarrow \underbrace{A^c \cap B^c}_{\subseteq A^c}, C$ st. u.

Hausaufgabe 19:**(4 Punkte)**

Ein Medikament in Tablettenform zeigt unabhängig voneinander zwei Wirkungen: die nicht sofort erkennbare Heilwirkung A mit Wahrscheinlichkeit 80% und die sofort erkennbare Nebenwirkung B mit Wahrscheinlichkeit 30%. Durch ein Versehen bei der Herstellung haben 1% der Tabletten eine (falsche) Dosierung mit Wahrscheinlichkeit 20% für A und mit Wahrscheinlichkeit 50% für B . Diese Tabletten sind äußerlich nicht feststellbar.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Heilwirkung eintritt unter der Bedingung, dass

- a) die Nebenwirkung eintritt. b) die Nebenwirkung ausbleibt.

Hinweis. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\cdot | B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ ist ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Lösung.

□

Lösungen

11

Gegeben seien die folgenden Ereignisse

A : Heilwirkung tritt ein

B : Nebenwirkung tritt ein

M : Medikament wird in richtiger Dosierung verabreicht.

Es folgt

$$P(M^c) = 0.01 \Rightarrow P(M) = 0.99$$

$$P(B|M) = 0.3 \Rightarrow P(B^c|M) = 0.7$$

$$P(B|M^c) = 0.5 \Rightarrow P(B^c|M^c) = 0.5$$

$$P(A|M) = 0.8 \Rightarrow P(A^c|M) = 0.2$$

$$P(A|M^c) = 0.2 \Rightarrow P(A^c|M^c) = 0.8$$

(a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

↑ Bedingte Wahrscheinlichkeit.

Berechne $P(A \cap B)$ und $P(B)$

mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.

12

Benutze dazu M und M^c als
Zerlegung von $\Omega \hat{=}$ Alle Tabletten des
Medikaments.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(M)P(B|M) + P(M^c)P(B|M^c) \\ &= 0.99 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.5 = 0.302 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(M)P(A \cap B|M) + P(M^c)P(A \cap B|M^c) \\ &= P(M)P(A|M)P(B|M) + P(M^c)P(A|M^c)P(B|M^c) \\ &\quad \uparrow A, B \text{ stoch. unabh.} \end{aligned}$$

$$= 0.99 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.2 \cdot 0.5 = 0.2386.$$

$$\Rightarrow P(A|B) = 0.7901 \quad (2)$$

$$(h) \quad P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{0.5554}{0.698} \approx 0.7957 \quad (2)$$

\uparrow wie in (a) \rightarrow Formel der totalen
Wahrscheinlichkeit.

Hausaufgabe 20:**(8 Punkte)**

Glücksspirale der Olympialotterie 1971: In einer Trommel befinden sich 70 mit den Ziffern $0, 1, \dots, 9$ versehene Kugeln, wobei jeweils 7 Kugeln die gleiche Ziffer tragen. Es werden 7 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung nebeneinandergelegt. Die 7 Ziffern auf den gezogenen Kugeln ergeben dann die Losnummer.

- a) Geben Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
- b) Hat bei dieser Lotterie jedes Los die gleiche Chance?
- c) Kann das Zufallsexperiment so verändert werden, dass jedes Los mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewinnt?

Lösung.

- a) Um die 70 Kugeln unterscheidbar zu machen, werden jeweils die 7 Kugeln, die die gleiche Ziffer tragen, noch zusätzlich mit Nummern $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ versehen.

Eine Kugel wird dann durch ein Paar $k = (z, n)$ mit $z = 0, 1, 2, \dots, 9$ und $n = 1, 2, \dots, 7$ repräsentiert.

Als Zufallsmechanismus haben wir Ziehen von 7 Kugeln ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge mit der Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_7) ; k_i = (z_i, n_i) \text{ paarweise verschieden für } i = 1, \dots, 7\}$$

mit

$$|\Omega| = 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65 \cdot 64 = 6041824588800$$

Elementen. Als σ -Algebra wird $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ gewählt und als Wahrscheinlichkeitsmaß die Laplace-Verteilung.

- b) Das Ergebnis "Ziehen der Loszahl $s = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7$ " entspricht der Menge A_s aller ω der Form

$$\omega = ((s_1, n_1), (s_2, n_2), (s_3, n_3), \dots, (s_7, n_7))$$

Die Menge $A_{1111111}$ enthält $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ Elemente: 7 Möglichkeiten, eine Kugel mit Ziffer 1 im ersten Zug zu ziehen, 6 für eine nochmalige 1 im zweiten Zug usw.

Die Menge $A_{1234567}$ enthält $7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7 = 7^7 = 823543$ Elemente, weil es für jeden Zug 7 Möglichkeiten gibt. Das Verhältnis der Gewinnchancen bei den entsprechenden Losen ist also

$$\frac{823543}{5040} \approx 163 : 1$$

- c) Werden nur zehn Kugeln mit den Ziffern $0, \dots, 9$ verwendet und werden die Kugeln nach jeder Ziehung zurückgelegt, so ergibt sich für jedes Los die Wahrscheinlichkeit von $P(\omega) = \frac{1}{10^7}$.

Wird die Kugel nach dem Ziehen zurückgelegt, dann sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich.

□

Zusatzaufgabe 21:**(keine Punkte)**

Eine Anwendung des Satzes von Bayes ist der Bayes-Spamfilter. Dieser Spamfilter geht bei der Selektion von Spam aus einem Email-Postfach allein von der statistischen Wahrscheinlichkeit aus, mit der die in einer Email (Betreffzeile) vorkommenden Worte bisher in Spam-Mails bzw. in erwünschten Mails vorkamen. Dadurch, dass der Bayes-Spamfilter somit seine Wahrscheinlichkeiten aus vergangenen Emails „lernt“, unterscheidet er sich von anderen Spamfiltern, die zur Erkennung von Spam nur auf feststehende „schwarze“ oder „weiße Listen“ zurückgreifen. Das Eintreffen einer neuen Email wird als Zufallsexperiment mit den beiden möglichen Ereignissen

- S : Email ist Spam
- S^c : Email ist erwünscht

betrachtet. Der Bayes-Spamfilter zerlegt die Betreffzeile der Email in einzelne Worte W_1, \dots, W_n und bestimmt die Spam-Wahrscheinlichkeit als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(S|W_1, \dots, W_n)$. Falls diese Wahrscheinlichkeit oberhalb eines Grenzwertes von 0.9 liegt, wird die Email als Spam klassifiziert, ansonsten nicht. Im Folgenden wird die stark vereinfachte Situation betrachtet, dass nur ein bestimmtes Wort analysiert wird:

In einer neu eintreffenden Email kommt das Wort W_1 = „Kontoinformation“ vor. Unserem Spamfilter liegen 300 Emails, darunter 200 Spams zur Analyse vor. In 40% aller Spams kam bisher „Kontoinformation“ vor, aber auch in einer erwünschten Email von einem Freund („Nerviger Kontoinformation-Spam“). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Spam-Email handelt unter der Bedingung, dass die Betreffzeile der Email das Wort „Kontoinformation“ enthält.

Lösung.

□

Lösung

K1

S : Email ist Spam

W_1 : Kontoinformation

Gesucht: $P(S|W_1)$

Beannt:

$$\cdot S \cap S^c = \emptyset \quad \wedge \quad S \cup S^c = \Omega$$

$$\cdot P(S) = \frac{2}{3}$$

$$\cdot P(W_1) = \frac{80}{100} + \frac{1}{300} = \frac{81}{300}$$

$$\cdot P(W_1|S) = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(S|W_1) &= \frac{\overset{\text{Satz v. Bayes}}{P(S) \cdot P(W_1|S)}}{P(W_1)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{81}{300}} = \frac{80}{81} \approx 0.99 \end{aligned}$$

d.h. ca. 99% aller Emails, die das Wort „Kontoinformation“ enthalten sind Spam.

Zusatzaufgabe 22:**(keine Punkte)**

Die Gentlemen A und B tragen ein Duell aus, bei dem abwechselnd der eine auf den anderen schießt, bis einer trifft. Beide Gentlemen haben sich im Vorfeld darauf einigen können, dass B anfängt.

Betrachten Sie nun für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ereignisse

B_{2n-1} : B trifft im $(2n-1)$ -ten Schuss.

A_{2n} : A trifft im $2n$ -ten Schuss.

Es gelte

$$P(B_{2n-1} \mid B_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap B_{2n-3}^c \cap A_{2n-2}^c) = p_b \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$P(A_{2n} \mid B_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{2n-2}^c \cap B_{2n-1}^c) = p_a \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die kaltblütigen Gentlemen werden also nicht nervös und lernen auch nicht dazu!

Zeigen Sie, dass das Duell mit Wahrscheinlichkeit 1 beendet wird.

Hinweis.

- Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass das Duell nach n Schüssen beendet ist.
- Es gilt die folgende Verallgemeinerung der Kettenregel:

Es seien (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0.$$

Dann gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \prod_{l=2}^n P\left(A_l \mid \bigcap_{i=1}^{l-1} A_i\right)$$

Lösung.

□

Lösung

1

Berechne die Wsk., dass Schütze B trifft.

B soll im $(2n-1)$ -ten Schuss treffen, d.h. es gibt $2n-2$ vorherige Fehlschüsse:

$$B_{2n-1} = B_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2n-2}^c \cap B_{2n-1} \quad (*)$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^n B_{2j-1}\right) = \sum_{j=1}^n P(B_{2j-1})$$

↑
Disjunkte Vereinigung
(klar da $B_{2j-1} \cap B_{2k-1} = \emptyset$ für $j \neq k$)

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n P(B_{2j-1} \cap B_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{2j-2}^c)$$

$$\stackrel{\text{Hinweis}}{=} \sum_{j=1}^n \underbrace{P(B_{2j-1} | B_1^c \cap \dots \cap A_{2j-2}^c)}_{= P_b} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{P(A_{2j-2}^c | B_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap B_{2j-3}^c)}_{= (1-p_a)} \cdot$$

$$\cdot \dots \cdot \underbrace{P(A_2^c | B_1^c)}_{= (1-p_a)} \cdot \underbrace{P(B_1^c)}_{= (1-p_b)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n P_k \cdot (1-p_a)^{j-1} \cdot (1-p_k)^{j-1}$$

Mit

D : Schütze B trifft

d.h. $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{2j-1}$ erhalten wir

$$P(D) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{2j-1}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P_k \cdot [(1-p_a) \cdot (1-p_k)]^{j-1}$$

$$= P_k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\left((1-p_a)(1-p_k)\right)^{j-1}}_{< 1}$$

$$= P_k \cdot \frac{1}{1 - (1-p_a)(1-p_k)}$$

Analog, mit

E : Schütze A trifft,

d.h. $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2j}$ erhalten wir

$$P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} P_a (1-p_k) [(1-p_a) \cdot (1-p_k)]^{j-1} =$$

$$= \frac{P_a \cdot (1 - P_u)}{1 - (1 - P_a)(1 - P_u)}$$

Berechne nun, das Duell wird irgendwann beendet⁴ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{P_a(1 - P_u) + P_u}{1 - (1 - P_a) \cdot (1 - P_u)}$$

$$= 1$$