

Mathematik für Ingenieure C4: INF

11. Übung

02.07. - 06.07.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 76:

(10 Punkte)

Eine Maschine sei jeden Tag in einem der Zustände g = „läuft gut“, s = „läuft schlecht“ und r = „wird repariert“. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen guten Zustand ein schlechter bzw. eine Reparatur folgt, sei 0.2 bzw. 0.1. Nach einem schlechten Tag muss die Maschine mit Wahrscheinlichkeit 0.3 repariert werden, besser werde sie nicht ohne Reparatur. Eine Reparatur führe nach einem Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.4 (0.2) zu einem guten (schlechten) Zustand.

- Beschreiben Sie das System als Markow-Kette und geben Sie die Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen an.
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung.
- Wie oft im Jahr (250 Arbeitstage) ist die Maschine im Mittel in der Reparatur?

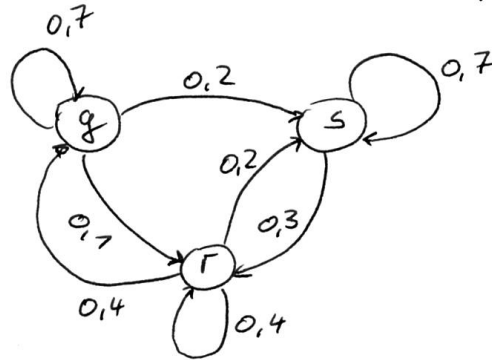
Lösung.

Lösung:

a) 3 Zustände: $g = \text{gut}$

$s = \text{schlecht}$

$r = \text{Reparatur}$



$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

b) z.B. $\pi(I-P)=0$, d.h. $\lambda=1$ ist EW von P -bzw. P^T

löse zunächst $(P^T - I) \cdot v = 0$ (Lsg. ex, Graph irreduzibel & aperiodisch)

$$P^T - I = \begin{pmatrix} -0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & -0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & -0.6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3II+2I \\ 3III+I}} \begin{pmatrix} -0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & -0.9 & 1.4 \\ 0 & 0.9 & -1.4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} -0.3 & 0 & 0.4 \\ 0 & -0.9 & 1.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=1 \text{ ist EW von } P^T \text{ bzw. } P$$

$x_3 = \mu$ ($\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) frei wählbar

$$\Rightarrow -0.9x_2 = -1.4\mu \Rightarrow x_2 = \frac{14}{9}\mu \text{ und}$$

$$-0.3x_1 = -0.4\mu \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}\mu$$

Somit erhalten wir $v = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{9}, 1\right)^T \mu$, mit

$$\text{aus } \sum \pi_i \stackrel{!}{=} 1 \text{ folgt } \left(\frac{14}{9} + \frac{12}{9} + \frac{9}{9}\right)\mu = \frac{35}{9}\mu = 1 \Rightarrow \mu = \frac{9}{35}$$

$$\Rightarrow \pi = \left(\frac{12}{35}, \frac{14}{35}, \frac{9}{35}\right) \quad ; \quad c) \text{ Tage Reparatur: } 250 \cdot \frac{9}{35} = 64,3$$

bzw. ca 65 Tage in Reparatur

□

Hausaufgabe 77:**(5 Punkte)**

3% aller Fluggäste, die einen Flug buchen, treten den Flug nicht an. Die Fluggesellschaft weiß dies und verkauft 515 Flugkarten für 500 verfügbare Plätze.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste einen Platz bekommen?

Wie kann die Fluggesellschaft die Kapazität der Flugzeuge bestimmen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% die Flüge nicht überbucht werden?

Hinweis: Nutzen Sie für die numerischen Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten die Poisson-Approximation.

Lösung.

$$p = 0,03$$

X - Fluggast kommt nicht zum Flug.

X ist $B(515, 0,03)$ -verteilt

Gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste einen Platz bekommen? D.h. 15 Gäste kommen nicht zum Flug.

$$P(X \geq 15) = 1 - \sum_{k=0}^{15} \binom{515}{k} (0,03)^k (0,97)^{515-k}$$

Poisson-Approximation: Verteilen wir X mit $\pi(\lambda)$ -

verteilt mit $\lambda = 515 \cdot 0,03 = 15,45$

$$P(X \geq 15) = 1 - \sum_{i=0}^{15} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = 1 - \sum_{i=0}^{15} \frac{15,45^i}{i!} e^{-15,45} = 0,4780 \approx 48\%$$

Gesucht: Wieviele Plätze nötig, damit mit 99% chl, alle Gäste einen Platz bekommen.

$$P(X \geq u_{0,99}) = 99\%$$

Y - "Fluggast kommt" mit $p = 0,97$

Y ist Poissonverteilt mit $\lambda = 515 \cdot 0,97$
oder binomialverteilt $B(515, 0,97)$.

Die Lösung ist das 99%-Quantil

$$u_{0,99} = P(X \leq u_{0,99}) = 99\%$$

Numerische Auswertung: $qbinom(0,99, 515, 0,97) = 528$

□

(5 Punkte)

- $$E[X + 2Y] = \boxed{},$$

$$\text{Var}[2X + Y] = \boxed{}.$$

- $$1_{(a,b)}(z-x) = 1_M(x) \quad \text{für } M = \boxed{},$$

$$1_{(a,x)}(z) = 1_M(x) \quad \text{für } M =$$

$$1_{(a,c)}(x) \cdot 1_{(b,d)}(x) = 1_M(x) \quad \text{für } M = \boxed{}.$$

- | | |
|---|--|
| $\int_0^2 1_{(0,1)}(x)1_{(2,4)}(y)dx =$ | |
|---|--|

- $$P(X \leq a) = \frac{1}{20} \quad \text{für } a =$$

$$P(X \geq b+1) = \frac{1}{20} \quad \text{für } b =$$

$$P(X \leq 0.05) = \frac{1}{20} \quad \text{für } \lambda = \quad .$$

- Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und $X \sim R_{[c,d]}$:

$P(X \leq a) = \frac{1}{20} \quad \text{für } a =$	
--	--

$$P(X \geq b+1) = \frac{1}{20} \quad \text{für } b = \boxed{},$$

$$P(X \leq 0) = \frac{1}{2} \quad \text{für } c = \boxed{}.$$

- Sei $Z \sim B(n, p)$: Normalapproximation $N(\mu, \sigma^2)$ mit

$\mu =$ und $\sigma =$

$P(z \leq k) \approx \Phi(y) \quad \text{mit} \quad y =$	
--	--

Lösung.

Hausaufgabe 78:

(5 Punkte)

- Seien X, Y zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Exp}(\lambda), Y \sim B(n, p)$:

$$E[X + 2Y] = \frac{1}{\lambda} + 2n \cdot p$$

$$\text{Var}[2X + Y] = \frac{4}{\lambda^2} + np(1-p)$$

- Seien $a, b, x, z \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$1_{(a,b)}(z-x) = 1_M(x) \quad \text{für } M = (z-b, z-a)$$

$$1_{(a,x)}(z) = 1_M(x) \quad \text{für } M = (\max(a, z), \infty)$$

$$1_{(a,c)}(x) \cdot 1_{(b,d)}(x) = 1_M(x) \quad \text{für } M = (b, \min(c, d))$$

- Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^2 1_{(0,1)}(x) 1_{(2,4)}(y) dx = 1_{(2,4)}(y)$$

- Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P(X \leq a) = \frac{1}{20} \quad \text{für } a = -\frac{\ln(\frac{19}{20})}{\lambda} = \frac{\ln(\frac{20}{19})}{\lambda}$$

$$P(X \geq b+1) = \frac{1}{20} \quad \text{für } b = \frac{\ln(20)}{\lambda} - 1$$

$$P(X \leq 0.05) = \frac{1}{20} \quad \text{für } \lambda = \lambda_0 \cdot \ln(\frac{20}{19}) \approx 1.02586$$

- Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und $X \sim R_{[c,d]}$:

$$P(X \leq a) = \frac{1}{20} \quad \text{für } a = \boxed{c + \frac{d-c}{20}}$$

$$P(X \geq b+1) = \frac{1}{20} \quad \text{für } b = \boxed{d - \frac{d-c}{20} - 1}$$

$$P(X \leq 0) = \frac{1}{2} \quad \text{für } c = \boxed{-d}$$

- Sei $Z \sim B(n, p)$: Normalapproximation $N(\mu, \sigma^2)$ mit

$$\mu = \boxed{n \cdot p} \quad \text{und } \sigma = \boxed{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

$$P(z \leq k) \approx \Phi(y) \quad \text{mit } y = \boxed{\frac{z - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}}$$