

Mathematik für Ingenieure C4: INF

12. Übung

09.07. - 13.07.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Zusatzaufgabe 81:**(keine Punkte)**

Die Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit Randdichte

$$f^{X_i}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$$

mit unbekannten Parameteren $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

- a) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parametervektor $(\mu, \sigma^2)^T$.
- b) Modifizieren Sie den ML-Schätzer für σ^2 , so dass dieser erwartungstreu für σ^2 ist.

Lösung.

□

(a) Likelihood-Funktion

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2\right)$$

$$\Rightarrow \ln L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) \\ + \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2\sigma^2} (x_i - \mu)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i =: \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

↖ Hess $\ln L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2)$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ -\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 & \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{pmatrix}$$

ist negativ
definit

b) Es ist

12

$$J_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\Rightarrow E(\hat{J}_{ML}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i^2) - E(\bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x_i^2) = \text{Var}(x_i) + (E x_i)^2 \\ E(\bar{x}^2) = \text{Var}(\bar{x}) + (E \bar{x})^2 \end{array} \right.$$

$$\stackrel{\text{f.u.}}{=} \frac{1}{n^2} \cdot n \text{Var}(x_i) + \mu^2$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2$$

Wäre also

$$J^2 = \frac{n}{n-1} \cdot J_{ML} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(J^2) &= \frac{n}{n-1} E(\hat{J}_{ML}) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 82:**(keine Punkte)**

Die Dauer eines Vorgangs sei zwischen 0 und ϑ stetig gleichverteilt. Von ϑ ist nur bekannt, dass es größer als 0 ist. Weiter sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe.

Überprüfen Sie, ob die Schätzfunktion

$$\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

- a) erwartungstreu ist für ϑ .
- b) asymptotisch erwartungstreu ist für ϑ .
- c) konsistent ist für ϑ .

Hinweis. Die Dichte der Zufallsvariablen $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ ist

$$f^{\hat{\vartheta}}(x) = \frac{n}{\vartheta^n} x^{n-1} 1_{(0, \vartheta)}(x).$$

Können Sie die Dichte von $\hat{\vartheta}$ herleiten?

Lösung.

□

$$X \sim D(0, a) \quad \text{mit } a > 0$$

d.h. $f^X(x; a) = \frac{1}{a} \cdot \mathbb{1}_{(0, a)}(x)$

Zum Hinweis:

Nach Aufg. 1. ist $X_i \sim D(0, a)$ für $i=1, \dots, n$

$$\Rightarrow F^{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{a} dx = \frac{x}{a} & , 0 \leq x \leq a \\ 1 & , x \geq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{F}^{\vec{X}}(x) = P(\vec{X} \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x)$$

$$\uparrow \vec{X} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

stetig.
unabhängig
verteilt

$$(P(X_1 \leq x))^n = (F^{X_1}(x))^n$$

$$= \begin{cases} 0 & , 0 < x \\ \left(\frac{x}{a}\right)^n & , 0 \leq x \leq a \\ 1 & , x \geq a \end{cases} \Rightarrow \text{Hinweis.}$$

$$(a) E(\hat{\sigma}) = \int_{\mathbb{D}} x \int^{\hat{\sigma}} f(x) dx \stackrel{\text{Hins.}}{=} \int_0^e x \cdot \frac{1}{\sigma n} x^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{\sigma n} \bigg|_{x=0}^e = \frac{1}{n+1} \cdot e$$

$\Rightarrow \hat{\sigma} = \max \{x_1, \dots, x_n\}$ ist nicht e-freu.

$$(M) \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\sigma}(x_1, \dots, x_n)) \stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot e = e$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}(x_1, \dots, x_n) = \max \{x_1, \dots, x_n\}$ ist asymptotisch e-freu.

(c) Vorbereitung:

$$E(\hat{\sigma}^2) = \int_{\mathbb{D}} x^2 \int^{\hat{\sigma}} f(x) dx = \int_0^e \frac{1}{\sigma n} x^{n+1} dx$$

$$= \frac{1}{n+2} \cdot \frac{x^{n+2}}{\sigma n} \bigg|_{x=0}^e = \frac{1}{n+2} e^2$$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{\sigma}) = E(\hat{\sigma}^2) - (E(\hat{\sigma}))^2$$

$$= \frac{1}{n+2} e^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot e^2 \rightarrow e^2 - e^2 = 0$$

$\Rightarrow \hat{\sigma} = \max \{x_1, \dots, x_n\}$ ist konsistent.

Zusatzaufgabe 83:**(keine Punkte)**

Man zeige: Die Höhe eines festen Punktes der Laufläche eines Rades (mit Durchmesser 1) über der Straße zu einem zufälligen Zeitpunkt ist $\text{Be}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -verteilt. (Der Drehwinkel des Rades sei dabei $\mathcal{R}(0, 2\pi)$ -verteilt.)

Lösung.

□

$$\Phi \sim \mathcal{U}(0, 2\pi]$$

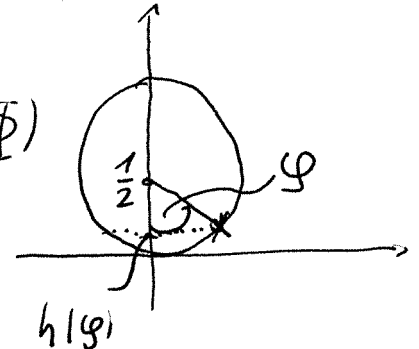
H beschreibe die Höhe eines Punktes auf einem
Kreis mit Durchmesser 1.

$$\text{Zeigend: } H \sim \text{Be}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Lösung: Die Höhe des Punktes auf dem Kreis kann
mit der Funktion

$$H = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\Phi) = g(\Phi)$$

beschrieben werden



Der Φ rechteck verteilt ist

und zu jedem Punkt auf der Höhe

eine Punkt $\varphi_0 \in (0, \pi)$ und $\varphi_1 \in (\pi, 2\pi)$

gehört, genügt es $\varphi \in (0, \pi)$ mit $\mathcal{U}(0, \pi)$

zu beschreiben. Dann ist g umkehrbar mit

$$g^{-1}(z) = \arccos(2z+1)$$

$$\text{mit } g^{-1}(0) = 0$$

$$F_H(h) = P(0 \leq H(\varphi) \leq h) = P^\Phi(0 \leq \varphi \leq g^{-1}(h))$$

$$= \int_0^{\arccos(2h+1)} \frac{1}{\pi} d\varphi = \arccos(1-2h) \cdot \frac{1}{\pi}$$

Somit ergibt sich für die Dichte:

$$f_H(h) = \frac{d}{dh} F_H(h) = \frac{d}{dh} \arccos(1-2h) \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2}{(1-(1-2h)^2)^{1/2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{(1-4h^2+4h-1)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{h-h^2} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{h^{1/2}(1-h)^{1/2}} = \text{be}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$