
Präsenzaufgabe 10:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme \mathcal{A} eine σ -Algebra darstellen:

- a) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, wobei Ω beliebig ist.
- b) $\mathcal{A} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, wobei Ω beliebig ist.
- c) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, wobei Ω beliebig ist.
- d) $\mathcal{A} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, wobei $\Omega = \mathbb{R}$ ist.
- e) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, wobei Ω beliebig ist und $A \subset \Omega$.
- f) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$, wobei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ist.

Lösung.

□

Lösungen

11

(a) Beh.: $\{\phi, \mathcal{R}\}$ ist eine σ -Algebra

Bew.: trivial. //

Bemerkung: $\{\phi, \mathcal{R}\}$ ist die größte / kleinste
 σ -Algebra auf \mathcal{R} .

(b) Fall: $|\mathcal{R}| = 2$, oBdA $\mathcal{R} = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$

Beh.: $\mathcal{A} = \{\phi, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ ist eine
 σ -Algebra.

Bew.: i) $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$ ✓ ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ✓

iii) $\phi \cup \{\omega_1\}, \phi \cup \{\omega_2\}, \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \in \mathcal{A}$,

$\phi \cup \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{A}$

$\{\omega_1\} \cup \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2\} \cup \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{A}$ ✓

□

Fall: $|\mathcal{R}| \geq 3$

Beh.: $\mathcal{A} = \{\{\omega\} \mid \omega \in \mathcal{R}\} \cup \{\phi, \mathcal{R}\}$ ist keine
 σ -Algebra.

Bew.: Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{R}$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$ gegeben.

$\Rightarrow \{\omega_1\}, \{\omega_2\} \in \mathcal{A}$, aber $\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} = \{\omega_1, \omega_2\} \notin \mathcal{A}$,
da $\{\omega_1, \omega_2\} \neq \mathcal{R}$ & $\{\omega_1, \omega_2\}$ nicht einelementig. □

Bemerkung: Fall mit $|\mathcal{R}| = 1$ macht in der Stochastik
keinen Sinn (\rightarrow überlege!).

(c) Beh.: $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ ist eine σ -Algebra.

Bew.: trivial. //

Vorwarnung! d) - e) nächste Seite //

(f) Beh.: $\mathcal{A} = \{\phi, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist
eine σ -Algebra.

Bew.: $\{2, 3\}, \{2, 4\} \in \mathcal{A}$, aber $\{2, 3\} \cup \{2, 4\} = \{2, 3, 4\} \notin \mathcal{A}$. //

(d) Beh. $\mathcal{A} := \{ [a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \}$
ist eine σ -Algebra.

Bew. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$

$\Rightarrow [a, b] \in \mathcal{A}$, aber

$$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \notin \mathcal{A}.$$

Ebenso: $[0, 1], [2, 4] \in \mathcal{A}$, aber
 $[0, 1] \cup [2, 4] \notin \mathcal{A}.$

Bem. \mathcal{A} erzeugt eine σ -Algebra,
nämlich die Borel- σ -Algebra,
ist selbst aber keine σ -Algebra.

(e) Beh. $\mathcal{A} := \{ \emptyset, \mathcal{R}, A, A^c \}$ ist eine
 σ -Algebra.

Bew. i) $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$ ✓

ii) Sei $B \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow B = \emptyset \vee B = \mathcal{R} \vee B = A \vee B = A^c$$

$$\Rightarrow B^c = \mathcal{R} \vee B^c = \emptyset \vee B^c = A^c \vee B^c = A$$

$$\Rightarrow B^c \in \mathcal{A}.$$

iii) zur Verknüpfung / Abgeschlossenheit:
Für beliebige Vereinigungen können
nur die folgenden Mengen entstehen:

$$\emptyset, \mathcal{R}, A, A^c$$

$$\text{z.B. } A \cup A^c = \mathcal{R}, \mathcal{R} \cup A = \mathcal{R}, \emptyset \cup A = A$$

usw.

