

Mathematik für Ingenieure C4: INF

11. Übung

02.07. - 06.07.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Präsenzaufgabe 74:

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markow-Kette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 \\ 3a & 0 & 1/6 & b \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}. \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- Berechnen Sie die Parameter a und b und zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung.

Präsenzaufgabe 75:

Der kleine Tobias nimmt zwei Schnuller auf einen Spaziergang mit. Bei Beginn des Spaziergangs hat er in der linken und der rechten Anoraktasche je einen, und er schreit nicht. Nach jeder ungeraden Spaziergangsminute greift er zufällig in eine der beiden Taschen und steckt, falls vorhanden, einen Schnuller in seinen Mund; falls keiner vorhanden ist, beginnt er zu schreien und er schreit weiter bis zum Ende des Spaziergangs. Nach jeder geraden Spaziergangsminute steckt er den Schnuller aus dem Mund, falls dort vorhanden, zufällig in eine der beiden Taschen zurück.

- Geben Sie eine geeignete Markow-Kette mit zugehöriger Übergangsmatrix \mathbf{P} an, die den obigen Ablauf eines Spaziergangs beschreibt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Tobias bis zum Ende eines n -minütigen Spaziergangs nicht schreit (**Hinweis:** Betrachten Sie die Markow-Kette zur Übergangsmatrix \mathbf{P}^2).
- Wie sieht das Langzeitverhalten eines solchen Spaziergangs aus?

Hausaufgabe 76:

(10 Punkte)

Eine Maschine sei jeden Tag in einem der Zustände g=„läuft gut“, s=„läuft schlecht“ und r=„wird repariert“. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen guten Zustand ein schlechter bzw. eine Reparatur folgt, sei 0.2 bzw. 0.1. Nach einem schlechten Tag muss die Maschine mit Wahrscheinlichkeit 0.3 repariert werden, besser werde sie nicht ohne Reparatur. Eine Reparatur führe nach einem Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.4 (0.2) zu einem guten (schlechten) Zustand.

- Beschreiben Sie das System als Markow-Kette und geben Sie die Übergangsmatrix und den Übergangsgraphen an.
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung.
- Wie oft im Jahr (250 Arbeitstage) ist die Maschine im Mittel in der Reparatur?

Hausaufgabe 77:

(5 Punkte)

3% aller Fluggäste, die einen Flug buchen, treten den Flug nicht an. Die Fluggesellschaft weiß dies und verkauft 515 Flugkarten für 500 verfügbare Plätze.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Fluggäste einen Platz bekommen?

Wie kann die Fluggesellschaft die Kapazität der Flugzeuge bestimmen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% die Flüge nicht überbucht werden?

Hinweis: Nutzen Sie für die numerischen Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten die Poisson-Approximation.

Hausaufgabe 78:

(5 Punkte)

- Seien X, Y zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Exp}(\lambda), Y \sim B(n, p)$:

$$E[X + 2Y] = \boxed{},$$

$$\text{Var}[2X + Y] = \boxed{}.$$

- Seien $a, b, x, z \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$1_{(a,b)}(z - x) = 1_M(x) \quad \text{für } M = \boxed{},$$

$$1_{(a,x)}(z) = 1_M(x) \quad \text{für } M = \boxed{},$$

$$1_{(a,c)}(x) \cdot 1_{(b,d)}(x) = 1_M(x) \quad \text{für } M = \boxed{}.$$

- Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^2 1_{(0,1)}(x) 1_{(2,4)}(y) dx = \boxed{}$$

- Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P(X \leq a) = \frac{1}{20} \quad \text{für } a = \boxed{},$$

$$P(X \geq b + 1) = \frac{1}{20} \quad \text{für } b = \boxed{},$$

$$P(X \leq 0.05) = \frac{1}{20} \quad \text{für } \lambda = \boxed{}.$$

- Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und $X \sim R_{[c,d]}$:

$$P(X \leq a) = \frac{1}{20} \quad \text{für } a = \boxed{},$$

$$P(X \geq b + 1) = \frac{1}{20} \quad \text{für } b = \boxed{},$$

$$P(X \leq 0) = \frac{1}{2} \quad \text{für } c = \boxed{}.$$

- Sei $Z \sim B(n, p)$: Normalapproximation $N(\mu, \sigma^2)$ mit

$$\mu = \boxed{} \quad \text{und } \sigma = \boxed{}$$

$$P(z \leq k) \approx \Phi(y) \quad \text{mit } y = \boxed{}$$

Abgabe der Hausaufgaben am **10.07.2018 bis 10 Uhr** in den Briefkasten 7.1 oder 7.2 „Mathe f. Ingenieure, Dozent: Rathmann“.