

# Mathematik für Ingenieure C4: INF

## 5. Übung

14.05. - 18.05.2016  
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann  
Dr. Lukas Pflug  
Department Mathematik  
Universität Erlangen-Nürnberg

### Präsenzaufgabe 30:

Betrachten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_{X,Y}(x,y) = C x y 1_{(0,x)}(y) 1_{(0,2)}(x).$$

- a) Bestimmen Sie die Konstante  $C \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion  $f$  eine gemeinsame Dichte der stetigen Zufallsvariablen  $X, Y$  darstellt, d.h. dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) d(x,y) = 1 \quad \text{und} \quad f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

gilt.

- b) Bestimmen Sie die sog. *Randdichte* von  $X$  und  $Y$ , d.h. berechnen Sie

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \quad \text{und} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx.$$

- c) Berechnen Sie  $P(X < 1, Y < 1)$ ,  $P(X = 1, Y < 1)$ ,  $P(X < 1, Y > \frac{1}{2})$  und  $P(X < 1)$ .

**Hinweis.** Sind  $X_1, \dots, X_k$  stetige Zufallsvariablen, so gilt

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = P((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_k]).$$

### Präsenzaufgabe 31:

Es seien  $G \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| \leq 2\} \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}) = 1 + x_1^2 + x_2^2.$$

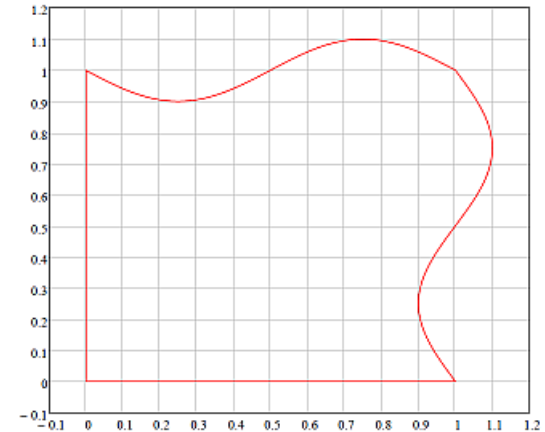
Berechnen Sie das Integral

$$\int_G f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

mit Hilfe der Transformationsformel.

### Präsenzaufgabe 32:

Die dargestellte Menge ist durch Geraden und Sinusfunktionen begrenzt. Stellen Sie die Menge durch zwei projizierbare Mengen dar und geben Sie sowohl die Funktionen  $\bar{y}(x)$  und  $\underline{y}(x)$  für die  $y$ -projizierbare Menge als auch die Funktionen  $\bar{x}(y)$  und  $\underline{x}(y)$  für  $x$ -projizierbare Menge an.



### Hausaufgabe 33:

(10 Punkte)

- a) Gegeben sei die Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$ , die durch die Mengen

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 = x_1^{-1}\}$$

begrenzt wird.

- i) Skizzieren Sie die Menge  $G$ .

- ii) Stellen Sie die Menge  $G$  als Vereinigung zweier  $x_2$ -projizierbarer Mengen dar.

- b) Mit den Parametern  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a, b, c > 0$  seien die Fläche einer Ellipse  $G \subset \mathbb{R}^2$  und einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt gegeben:

$$G = \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_G f(x, y) \, d(x, y)$$

mit Hilfe der Transformationsformel.

### Hausaufgabe 34: (6 Punkte)

Betrachten Sie wieder den Bogenschützen aus Hausaufgabe 11b). Die bivariate Verteilung der stetigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  zum Merkmal  $(x, y) \in \Omega$  (Trefferpunkt auf der Zielscheibe) sei hierbei durch die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2}}\right)^{-1} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) 1_{\Omega}(x, y)$$

gegeben. Beim Treffen des Mittelpunkts der Zielscheibe ist der Bogenschütze also sehr geübt!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(A)$  und  $P(B)$ , wobei die Ereignisse  $A, B$  wie in Hausaufgabe 11b) gegeben sind.

**Hinweis.** Die Transformationsformel ist hierbei sehr nützlich!

### Hausaufgabe 35: (4 Punkte)

Es seien  $X$  und  $Y$  stetige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4} & \text{falls } |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1, \\ 0 & \text{falls } x, y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

eine gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X, Y$  ist. Berechnen Sie weiter die Randdichte von  $X$ .

### Bergaufgabe 36: (keine Punkte)

Eine Brauerei beliefert schon seit Jahren die Bergkirchweih in Erlangen. Der Brauerei ist bekannt, dass 92% der abgefüllten Fässer dem Reinheitsgebot entsprechen. Eine Qualitätskontrolle innerhalb der Brauerei lässt ein Bierfass, welches dem Reinheitsgebot entspricht, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.97, und ein Bierfass, welches dem Reinheitsgebot nicht entspricht, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 ausliefern.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das abgefüllte Bier auf der Bergkirchweih auch wirklich dem Reinheitsgebot entspricht?

### Zusatzaufgabe 37: (keine Punkte)

Es seien  $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$  mit  $0 < R_2 < R_1$  und eine Kreisscheibe  $K \subset \mathbb{R}^3$  in der  $(x, z)$ -Ebene um den Punkt  $(R_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  mit Radius  $R_2$  gegeben (siehe Abb.1, Bild links). Der Torus  $T \subset \mathbb{R}^3$  entsteht durch Drehung von  $K$  um die  $z$ -Achse (siehe Abb.1, Bild rechts). Mit dem Quader

$$H := ]0, R_2[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$$

und der Transformation

$$\Phi : H \rightarrow T, \quad \Phi(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} (R_1 + r \cos \theta) \cos \varphi \\ (R_1 + r \cos \theta) \sin \varphi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

kann  $T$  in "Toruskoodinaten" transformiert werden. Berechnen Sie das Volumen

$$\text{Vol}(T) = \int_T 1 \, d(x, y, z)$$

von  $T$  mit Hilfe der Transformationsformel.

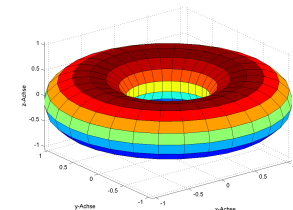
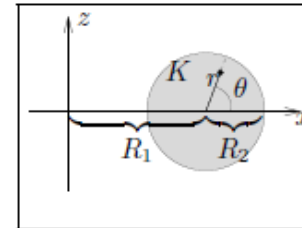


Abbildung 1: Illustrationen der Kreisscheibe  $K$  (links) und des Torus  $T$  (rechts)

**Hinweis.** Transformationsformel in  $\mathbb{R}^3$  siehe auch Formelsammlung.

**Abgabe der Hausaufgaben am 24.05.2016 bis 10 Uhr in den Briefkasten 7.1 oder 7.2 „Mathe f. Ingenieure, Dozent: Rathmann“.**