

Mathematik für Ingenieure C4: INF

4. Übung

07.05. - 11.05.2016
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 26:

(8 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \vee x > b \\ \frac{4}{(b-a)^2} x - \frac{4a}{(b-a)^2} & \text{für } a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{-4}{(b-a)^2} x + \frac{4b}{(b-a)^2} & \text{für } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b. \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass f die Eigenschaften einer Riemann-Dichte erfüllt und zeichnen Sie diese für $a = 0$ und $b = 4$.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(0.75a + 0.25b < X < 0.25a + 0.75b)$$

und stellen Sie diesen Wert in Ihrer Zeichnung für $a = 0$ und $b = 4$ dar.

Lösung.

□

(a) zu zeigen:

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-a}^a f(x) dx = 1.$

Zu i): Für $x < a \vee x > b$ ist es offensichtlich.

Für $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ ist

$$f(x) = \frac{4x-4a}{(b-a)^2} = \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} \geq 0$$

\uparrow
 $x \geq a$

Für $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ ist

$$f(x) = \frac{-4x+4b}{(b-a)^2} = \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} \geq 0$$

\uparrow
 $x \leq b$

Fazit: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Zu ii): Es ist $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : x < a \vee x > b$

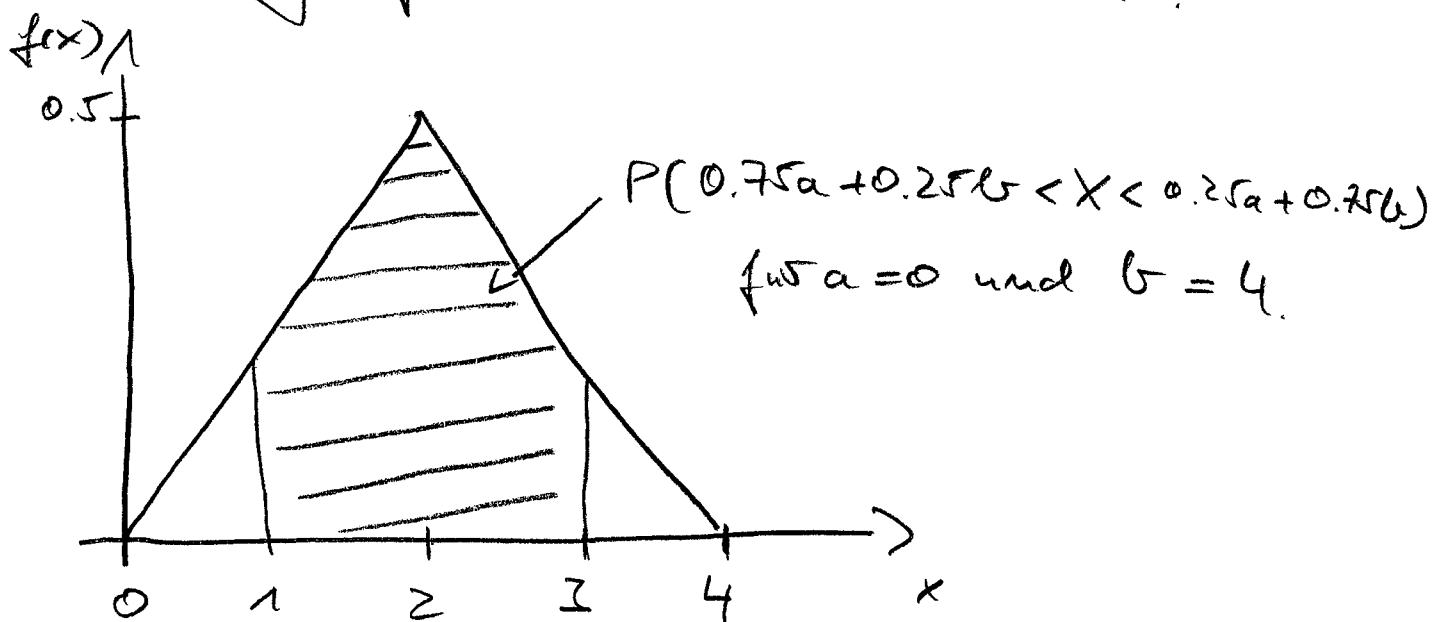
$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx$$

$$+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = \frac{4}{(b-a)^2} \left[\frac{1}{2} x^2 - ax \right]_{x=a}^{\frac{a+b}{2}}$$

$$+ \frac{4}{(b-a)^2} \left[bx - \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=\frac{a+b}{2}}^b =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)^2}{4} - a \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} a^2 + a^2 \right) \\
 &+ \frac{4}{(b-a)^2} \left(b^2 - \frac{1}{2} b^2 - b \cdot \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)^2}{4} \right) \\
 &= \frac{4}{(b-a)^2} \left(\frac{(a+b)^2 - 4ab}{4} \right) = \frac{4}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Zeichnung für $a=0$ und $b=4$.



3

$$b) \quad P(0.75a + 0.25b < X < 0.25a + 0.75b)$$

$$= \int_{0.75a + 0.25b}^{0.25a + 0.75b} f(x) dx = \int_{0.75a + 0.25b}^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{0.25a + 0.75b} f(x) dx$$

$\left\{ \begin{array}{l} 0.75a + 0.25b < 0.5a + 0.5b \\ 0.25a + 0.75b > 0.5a + 0.5b \end{array} \right.$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{(a-b)^2}{(b-a)^2} = \frac{3}{4}$$

//

Hausaufgabe 27:**(4 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion darstellen:

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \ln(1 + \sin x) & \text{für } 0 < x \leq \frac{3}{4}\pi \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

$$\text{b) } F(x) = (1 - \exp(-x))1_{[0,\infty)}(x)$$

Lösung.

□

Lösungen

1

(a) Beh.: F ist eine Verteilungsfunktion.

Beweis: F ist nicht rechtsseitig stetig in $\frac{3}{4}\pi$,
denn:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F\left(\frac{3}{4}\pi + h\right) \underset{\substack{\uparrow \\ F\left(\frac{3}{4}\pi + h\right) = 1 \quad \forall h > 0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1 \neq \underbrace{\ln(1 + \sin \frac{3}{4}\pi)}_{= F(\frac{3}{4}\pi) \approx 0.535}.$$

Alternative Begründung:

①

F ist nicht monoton steigend, denn:

$$F\left(\frac{1}{4}\pi\right) = F\left(\frac{3}{4}\pi\right) < F\left(\frac{1}{2}\pi\right). \quad \blacksquare$$

(b) Beh.: F ist eine Verteilungsfunktion.

Beweis: i) Für $x \in (0, \infty)$ ist $F'(x) = e^{-x} > 0$

$\Rightarrow F$ ist monoton steigend auf $(0, \infty)$.

Weiter ist $F(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0]$.

$\Rightarrow F$ ist monoton steigend auf \mathbb{R} . ①

ii) Es ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \underset{\substack{\uparrow \\ F(x) = 0 \quad \forall x \leq 0}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$$

und

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) = 1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \bar{F}(x) = 1 - e^{-x} \quad \forall x > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \bar{F}(0+h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 - e^{-h} = 0 = \bar{F}(0) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \bar{F}(h) = 1 - e^{-h} \quad \forall h > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$\Rightarrow \bar{F}$ rechtsseitig stetig in 0 ($\hat{=}$ einzige kritische Stelle).



Hausaufgabe 28:**(8 Punkte)**

Die Lebensdauer einer Glühlampe (in Stunden) sei exponentialverteilt mit Parameter $\alpha = \frac{1}{400}$. Es sei A_t das Ereignis „Die Glühlampe brennt mindestens t Stunden“.

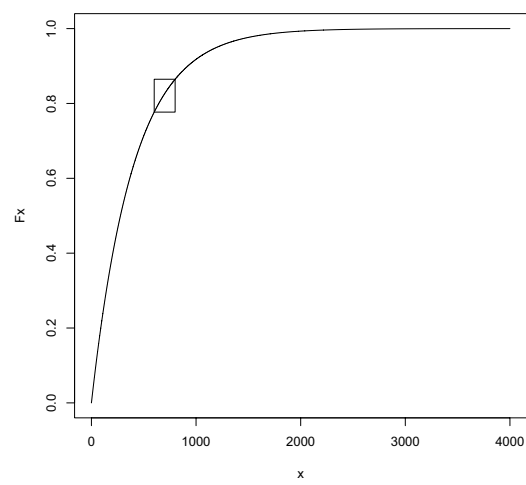
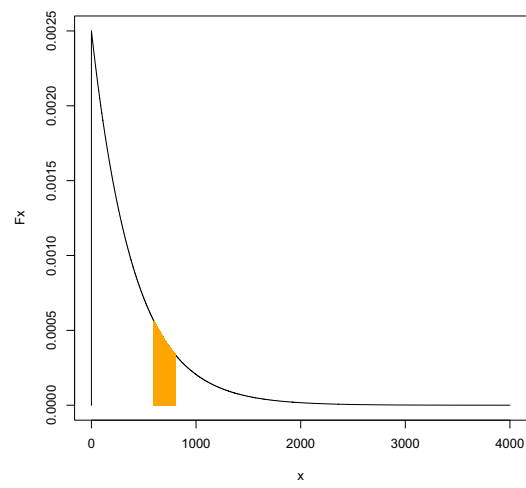
- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A_t für $t = 600, 800$ Stunden.
- b) Wie wahrscheinlich ist eine Lebensdauer zwischen 600 und 800 Stunden? Stellen Sie das Ereignis grafisch dar.
- c) Wie ändert sich die Verteilungsfunktion, wenn die Glühlampe planmäßig nach 600 Stunden ausgewechselt wird? Skizzieren Sie per Hand den Graphen der Verteilungsfunktion!

Zusatz: Sind die Auswertungen mit Hilfe der Tabellen für die Standardnormalverteilung möglich?

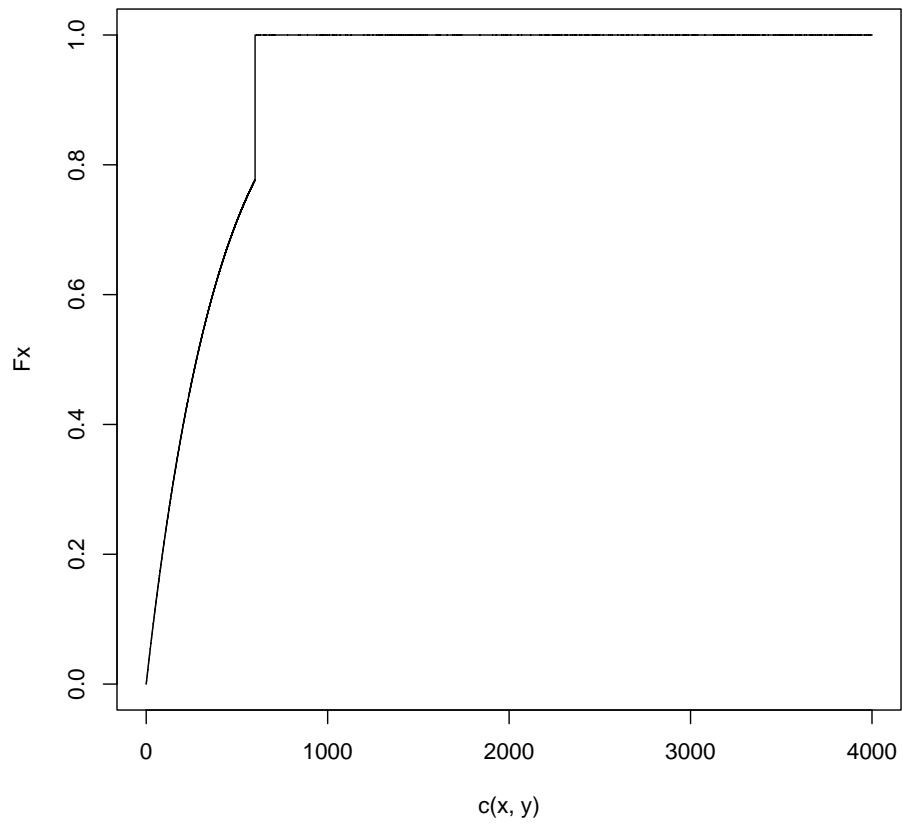
Lösung.

Berechnungen siehe übernächste Seite!

- b) • Skizze oben: Graph der Dichte mit der Fläche für die Wahrscheinlichkeit.
- Skizze unten: Graph der Verteilungsfunktion mit der Markierung für $x \in [600, 800]$ und $P(600 \leq X \leq 800)$.



c) Graph der Verteilungsfunktion



□

Lösungen

11

(a) $A_{\pm} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq \pm\}$,
wobei $X =$ "Lebensdauer Glühbirne"

Exponentialverteilung:

$$\text{Dichte } f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}$$

$$\text{VF } \text{Exp}_{\alpha}(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = 1 - e^{-\alpha x}$$

$$\begin{aligned} P(A_{\pm}) &= 1 - P(A_{\pm}^c) = 1 - \text{Exp}_{\alpha}(\pm) \\ &= e^{-\alpha \pm} = \begin{cases} e^{-\frac{3}{2}} & , t=600 \\ e^{-2} & , t=800 \end{cases} \end{aligned}$$

Nut der Standardnormalverteilung:

$$\begin{aligned} \cdot e^{-\frac{3}{2}} &= \sqrt{2\pi} \cdot \underbrace{\phi(\sqrt{3})}_{\approx 0.0893} \approx 0.2238 \\ &\quad \uparrow x=\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot e^{-2} &= \sqrt{2\pi} \cdot \underbrace{\phi(2)}_{\approx 0.0540} \approx 0.1353 \end{aligned}$$

③

Bem: Für $t=200$ ergibt sich $P(A_{200}) \approx 0.60$.

$$(b) P(A_{600} \cap A_{800}^c) = P(\{\omega \in \Omega \mid 600 \leq X(\omega) \leq 800\})$$

$$= \text{Exp}_\alpha(800) - \text{Exp}_\alpha(600) = (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-\frac{3}{2}})$$

$$= -e^{-2} + e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.08779. \quad (1)$$

① Für grafische Präsentation.

(c) Wird die Glühbirne nach 600 Stunden ausgetauscht gilt

$$P(X > 600) = 0$$

Andererseits ist

$$P(X > 600) = 1 - \text{Exp}_\alpha(600)$$

Daher folgt

$$\text{Exp}_\alpha(600) = 1.$$

Die Verteilungsfunktion ist also nun

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \text{Exp}_\alpha(x) & , 0 < x < 600 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

① für Skizze

Zusatzaufgabe 29:**(keine Punkte)**

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = Cn^{-2}$.

b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = C \frac{2^n}{n!}$.

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = C \left((ax)1_{[0,1]}(x) + (-bx + a + b)1_{(1, \frac{a+b}{b}]}(x) \right)$, wobei $a \geq b > 0$.

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = C (x(1-x))^{-\frac{1}{2}} 1_{(0,1)}(x)$.

Bestimmen Sie die Konstante $C \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f in a) und b) eine diskrete Dichte darstellt sowie in c) und d) eine stetige Dichte.

Berechnen Sie weiterhin die Wahrscheinlichkeit $P(X > 2)$, wobei X gemäß den Dichten in a) bis d) verteilt sei.

Lösung.

□

Lösungen

$$(a) f(n) = C n^{-2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Bedingung: } \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\text{Dazu: } \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot \frac{1}{n^2} = C \cdot \frac{\pi^2}{6} \stackrel{!}{=} 1$$

↑
Madel Euler (1734)

$$\Rightarrow C = \frac{6}{\pi^2}$$

①

Es gilt:

$$P(X > 2) = \sum_{n=3}^{\infty} f(n) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \right) = 1 - \frac{15}{\pi^2 \cdot 2} \quad \text{①}$$

$$(b) f(n) = C \cdot \frac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Bedingung: } \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\text{Dazu: } \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} C \cdot \frac{2^n}{n!} = C (e^2 - 1) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{e^2 - 1}$$

①

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 P(X > 2) &= \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \frac{1}{e^2 - 1} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\
 &= \frac{1}{e^2 - 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - 1 - 2 - 2 \right) \\
 &= \frac{1}{e^2 - 1} (e^2 - 5) \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(c) $f(x) = C \cdot (ax) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (-bx + a + b) \mathbb{1}_{(1, \frac{a+b}{b}]}(x)$

Bedingung: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{!}{=} 1$

Dazu: Es ist $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{a+b}{b}]$ > 1 , da $a, b > 0$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\frac{a+b}{b}} f(x) dx$$

$$= C \cdot \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\frac{a+b}{b}} f(x) dx \right)$$

$$= C \cdot \left(\int_0^1 ax dx + \int_1^{\frac{a+b}{b}} (-bx + a + b) dx \right)$$

$$= C \cdot \left(\frac{a}{2} x^2 \Big|_0^1 + \left[-\frac{b}{2} x^2 + ax + bx \right]_1^{\frac{a+b}{b}} \right) =$$

$$= C \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \left(\frac{a+b}{b} \right)^2 + (a+b) \left(\frac{a+b}{b} \right) + \frac{b}{2} - a - b \right)$$

$$= C \cdot \left(\frac{a+b}{2} \left(\frac{a+b}{b} - 1 \right) \right) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{2b}{(a+b) \cdot a} \quad (1)$$

Es gilt:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - C \cdot \left(\int_0^1 ax \, dx + \int_1^2 -bx + a + b \, dx \right)$$

$$\uparrow \frac{a+b}{b} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq b \text{ (siehe Aufgabenstellung)}$$

$$\stackrel{\text{S.o.}}{=} 1 - C \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2} 4 + a \cdot 2 + b \cdot 2 + \frac{b}{2} - a - b \right)$$

$$= 1 - \frac{b}{(a+b) \cdot a} (3a - b) \quad (1)$$

$$(d) f(x) = C \cdot (x(1-x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$\text{Bedingung: } \int_{-A}^A f(x) \stackrel{!}{=} 1$$

4

Dichte der $\text{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Verteilung, d.h.
 $\mu = \nu = \frac{1}{2}$.

Wähle daher $C = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\pi}$. ①

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} f(x) dx = 0 \quad \text{①}$$

$\uparrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$.