

# Mathematik für Ingenieure C4: INF

## 6. Übung

24.05. - 28.05.2016  
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann  
Dr. Lukas Pflug  
Department Mathematik  
Universität Erlangen-Nürnberg

### Hausaufgabe 41:

(10 Punkte)

Schräger Wurf auf dem Planeten "Idealisierte Welt" ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ).  $X$  sei eine Zufallsvariable über  $\Omega := [0, \frac{\pi}{2}]$ .  $\mathcal{A}$  sei die dazu passende Borel  $\sigma$ -Algebra. Die Zufallsvariable „Abwurfwinkel“ unterliegt der folgenden Verteilungsdichte:

$$f_X(\alpha) = C \cdot 1_{(\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{18})}(\alpha)$$

Für die Wurfweite  $W$  ergibt sich in Abhängigkeit des Abwurfwinkels  $\alpha$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  folgende Formel:

$$W(\alpha) := \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

- Bestimmen Sie  $C$  derart, dass  $f_X$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.
- Berechnen Sie für  $v_0 = 20 \frac{m}{s}$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Wurfweite mindestens  $35m$  beträgt.
- Geben Sie die Verteilungsdichte der Zufallsvariable „Wurfweite“  $W$  an und skizzieren Sie diese für  $v_0 = 15 \frac{m}{s}$ .

### Lösung.

- Bestimmen Sie  $C$  derart, dass  $f_X$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist:

Dafür sind 2 Bedingungen zu Zeigen:

•

$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall C \geq 0$$

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = C \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{5\pi}{18}} 1 dx = C \frac{6}{\pi} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{6}{\pi}$$

1 Punkt

- Berechnen Sie für  $v_0 = 20 \frac{m}{s}$  die Wahrscheinlichkeit, dass die Wurfweite mindestens  $35m$  beträgt:

$$W(x) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2x) = 40 \sin(2x)$$

Gesucht: Wurfweite mindestens  $35m$

$$P_X(\{x \in \Omega \mid W(x) \geq 35\}) = P_X\left(\left\{x \in \Omega \mid \sin(2x) \geq \frac{7}{8}\right\}\right)$$

**1 Punkt**

Gesucht:  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  so, dass

$$\sin(2x) \geq \frac{7}{8}.$$

Dies ist der Fall, für alle  $x$  für die gilt:

$$x \in \left[ \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{7}{8} \right), \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{7}{8} \right) \right]$$

**2 Punkte**

Somit gilt:

$$P_X(\{x \in \Omega \mid W(x) \geq 35\}) = \frac{6}{\pi} \int_{\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{7}{8} \right)}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{7}{8} \right)} 1_{\left( \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{18} \right)}(x) dx = \frac{6}{\pi} \int_{\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{7}{8} \right)}^{\frac{5\pi}{18}} 1 dx \quad (1)$$

$$= \frac{6}{\pi} \left( \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{7}{8} \right) \right) \approx 0.649250 \quad (2)$$

**2 Punkte**

- c) Geben Sie die Verteilungsdichte der Zufallsvariable „Wurfweite“  $W$  an und skizzieren Sie diese für  $v_0 = 15 \frac{m}{s}$ :

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} P_x(\{x \in \Omega \mid W(x) \leq w\}) = -\frac{d}{dw} P_x(\{x \in \Omega \mid W(x) \geq w\}) \quad (3)$$

**1 Punkt**

Es gibt zwei Fälle:

1. Fall:  $w \geq \frac{v_0^2}{g}$ , diese Wurfweite ist nicht zu erreichen, somit ist:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} P_x(\{x \in \Omega \mid W(x) \leq w\}) = \frac{d}{dw} P_x(\{x \in \Omega \mid W(x) \leq \frac{v_0^2}{g}\}) = 0$$

die Ableitung verschwindet da die Wahrscheinlichkeit nicht mehr von  $w$  abhängt.

**1 Punkt**

2. Fall:  $w \in [0, \frac{v_0^2}{g})$

$$f_W(w) = -\frac{d}{dw} P_x(\{x \in \Omega \mid W(x) \geq w\}) \quad (4)$$

$$= -\frac{d}{dw} P_x \left( \left[ \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_0^2} \right), \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_0^2} \right) \right] \right) \quad (5)$$

$$= -\frac{d}{dw} \frac{6}{\pi} \int_{\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_0^2} \right)}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_0^2} \right)} 1_{\left( \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{18} \right)}(x) dx \quad (6)$$

**2 Punkte**

es müssen 3 Fälle unterschieden werden:

$$= -\frac{6}{\pi} \frac{d}{dw} \begin{cases} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{5\pi}{18}} 1 dx & \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) \leq \frac{\pi}{9}, \\ \int_{\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right)}^{\frac{5\pi}{18}} 1 dx & \frac{\pi}{9} < \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) \leq \frac{4\pi}{9}, \\ \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right)}^{\frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right)} 1 dx & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

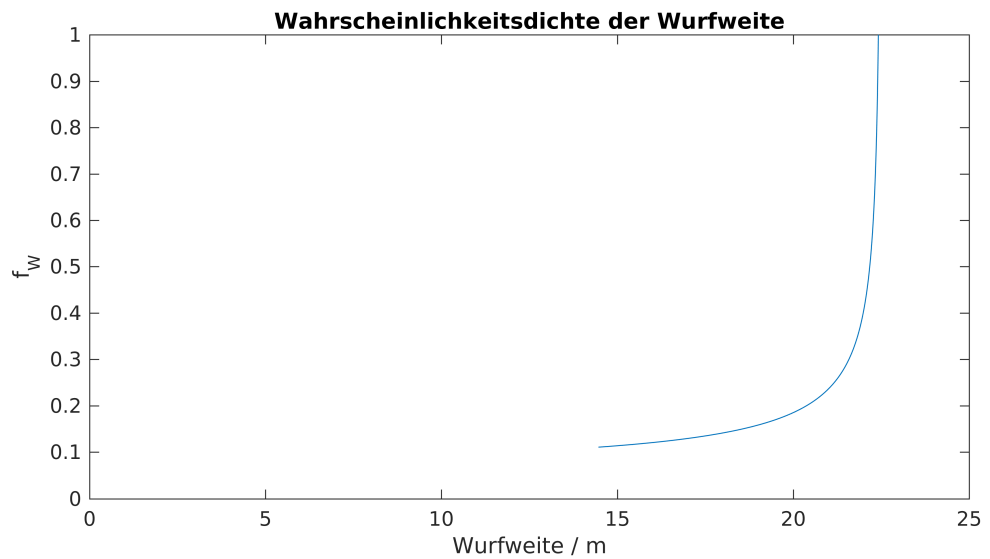
$$= -\frac{6}{\pi} \frac{d}{dw} \begin{cases} \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} & \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) \leq \frac{\pi}{9}, \\ \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) & \frac{\pi}{9} < \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) \leq \frac{4\pi}{9}, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) - \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (8)$$

$$= \frac{3}{\pi} \left( \frac{d}{dw} \sin^{-1} \left( \frac{w \cdot g}{v_o^2} \right) \right) \begin{cases} 0 & w \leq \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{2\pi}{9} \right), \\ 1 & \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{2\pi}{9} \right) < w \leq \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{8\pi}{9} \right), \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

$$= \frac{3g}{\pi \sqrt{v_o^4 - g^2 w^2}} \begin{cases} 0 & w \leq \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{2\pi}{9} \right), \\ 1 & \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{2\pi}{9} \right) < w \leq \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{8\pi}{9} \right), \\ 2 & \frac{v_o^2}{g} \sin \left( \frac{8\pi}{9} \right) < w \leq \frac{v_o^2}{g} \end{cases} \quad (10)$$

die obere schranke für  $w$  im letzten Fall ergibt sich aus der Beziehung  $W(x) := \frac{v_o^2}{g} \sin(2x) \leq \frac{v_o^2}{g}$

**3 Punkte**



Skizze für  $v_0 = 15m$

**1 Punkt**

□

---

**Hausaufgabe 42:****(10 Punkte)**

In den täglichen Abgasen einer Müllverbrennungsanlage sei  $x_1$  die Menge der Schwebstoffe vor der Inbetriebnahme einer zusätzlichen Abgasreinigung und  $x_2$  die Menge danach (in Tonnen). Unter der Voraussetzung, dass  $x_1$  durch eine Beta(3,1)-Verteilung modelliert werden kann und  $x_2$  gleichverteilt zwischen 0 und  $\frac{x_1}{2}$  ist, bestimmen Sie

- die R-Dichte für ein Modell des Gesamtversuchs und skizzieren Sie diese (Ausdrücke sind zugelassen).
- die Wahrscheinlichkeit, dass nach Inbetriebnahme noch mehr als 0,3t Schwebstoffe anfallen.

**Tipp:** Verwenden Sie die Eigenschaften der Gammafunktion:  $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$  und  $\Gamma(\nu+1) = \nu!$  für  $\nu \in \mathbb{N}$ .

---

**Lösung.**

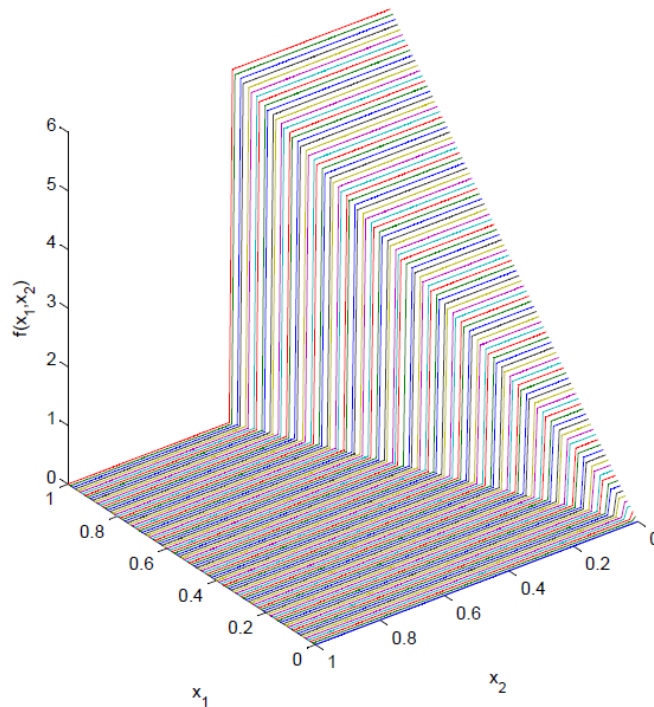
- a) Wir benötigen ein gekoppeltes Modell mit Übergangs-R-Dichten.

1. Stufe:  $f_1^0(x_1) = be(3, 1) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3)\Gamma(1)} x_1^2 (1 - x_1)^0 = 3x_1^2$

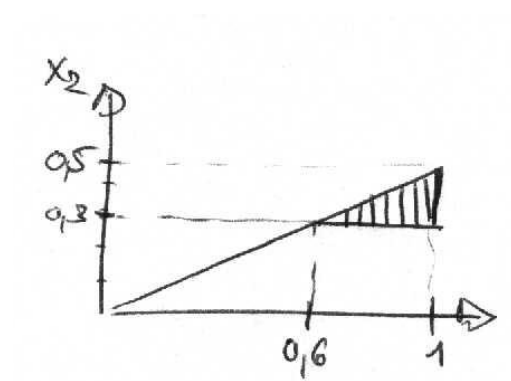
2. Stufe:  $f_2^1(x_1; x_2) = \begin{cases} \frac{2}{x_1}, & x_1 \in (0, 1) \ x_2 \in (0, \frac{x_1}{2}) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Daraus ergibt sich die Gesamtdichte

$$f(x_1, x_2) = f_1^0(x_1) f_2^1(x_1; x_2) = \begin{cases} 6x_1, & x_1 \in (0, 1) \ x_2 \in (0, \frac{x_1}{2}) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



b) Zum Ereignis  $X_2 > 0.3t$  gehört der Bereich  $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in (0.6, 1), x_2 \in (0.3, \frac{x_1}{2})\}$ .



Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}
 P(X_2 > 0,3) &= P\left(\left\{\omega \in \Omega : X_2(\omega) \in \left(0.3, \frac{x_1}{2}\right), X_1(\omega) \in (0.6, 1)\right\}\right) \\
 &= \int_{0.6}^1 \int_{0.3}^{\frac{x_1}{2}} 6x_1 \, dx_2 \, dx_1 \\
 &= \int_{0.6}^1 [6x_1 x_2]_{0.3}^{\frac{x_1}{2}} \, dx_1 \\
 &= \int_{0.6}^1 3x_1^2 - \frac{18}{10}x_1 \, dx_1 = \left[x_1^3 - \frac{9}{10}x_1^2\right]_{0.6}^1 \\
 &= \frac{1}{10} - \left(\frac{27}{125} - \frac{81}{250}\right) = \frac{26}{125}
 \end{aligned}$$

□

---

**Zusatzaufgabe 43:****(keine Punkte)**

Es seien  $U_1, \dots, U_6$  sechs Urnen, die weiße und schwarze Kugeln enthalten. Dabei sei in Urne  $U_i$  das Verhältnis von weißen zu schwarzen Kugeln  $i : (i + 1)$ . Zuerst wird nun zufällig eine der Urnen ausgewählt und danach ein Laplace-Würfel geworfen. Zeigt der Würfel  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  Augen, so wirft man anschließend  $j$  faire Münzen. Falls dabei  $k \geq 1$  Köpfe fallen und  $U_k$  nicht die anfangs gewählte Urne ist, zieht man eine Kugel aus  $U_k$ . Andernfalls zieht man eine Kugel aus  $U_1$ . Man interessiert sich für das Ereignis, dass eine weiße Kugel gezogen wird. Geben Sie die Gesamtdichte an.

---

**Lösung.**

Die Ergebnismenge lautet

$$\Omega = \underbrace{\{1, \dots, 6\}}_{\text{Urnenmodell}} \times \underbrace{\{1, \dots, 6\}}_{\text{Würfelwurf}} \times \underbrace{\{0, \dots, 6\}}_{\text{Köpfe}} \times \underbrace{\{S, W\}}_{\text{Farbe der Kugel}}$$

Für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses  $\{\omega\}$  erhalten wir

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^4 f_i^{i-1}(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \omega_i).$$

Fehlt nur noch die Angabe der Übergangsdichten.

$$\begin{aligned} f_1(i) &= \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6 & f_2^1(i; j) &= \frac{1}{6}, \quad j = 1, \dots, 6 \\ f_3^2(i, j; k) &= \begin{cases} 0 & k > j \\ \binom{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{j-k} & k \leq j \end{cases} \\ f_4^3(i, j, k; W) &= \begin{cases} \frac{1}{3}, & k = i \vee k = 0, \\ \frac{k}{2k+1}, & \text{sonst} \end{cases} & f_4^3(i, j, k; S) &= 1 - f_4^3(i, j, k; W) \end{aligned}$$

□

---

**Zusatzaufgabe 44:****(keine Punkte)**

Martin fliegt von Nürnberg nach Tokio und steigt dabei in Paris und Shanghai um. An jedem Flughafen (inklusive Nürnberg) muss sein Koffer verladen werden. Dabei wird der Koffer mit Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$  fehlgeleitet. In Tokio stellt er fest, dass sein Koffer nicht angekommen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Koffer in Nürnberg fehlgeleitet, mit welcher in Paris und mit welcher in Shanghai?

---

**Lösung.**

□

Lösung

1

W' Baum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$  und  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  
wobei

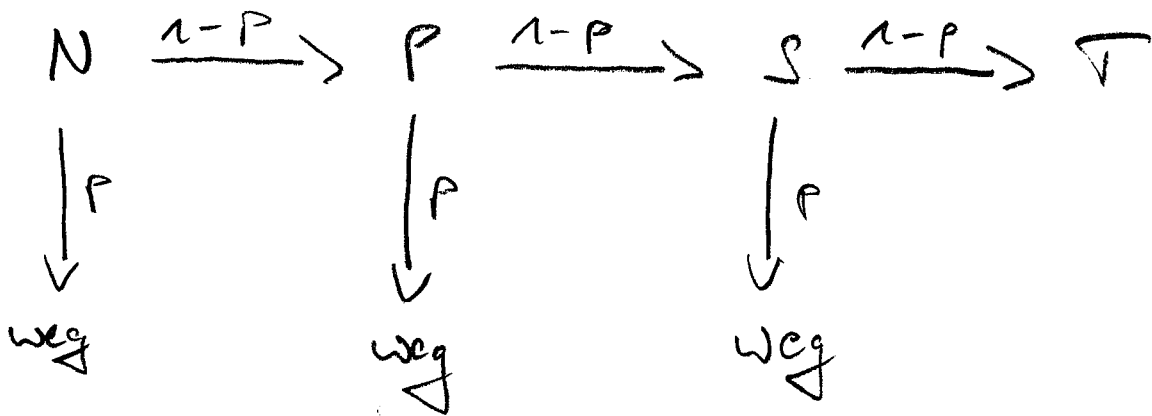
$$\Omega_i = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nicht folgender}}}{\Omega}, \overset{\substack{\downarrow \\ \text{folgender}}}{\bar{\Omega}} \right\} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}$$

Es ist

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= f_1(\omega_1) \cdot f_2^1(\omega_1; \omega_2) \cdot f_3^2(\omega_1, \omega_2; \omega_3) \end{aligned}$$

↑  
Koppelung von  $f_1, f_2^1, f_3^2$

Berechne nun die Übergangsdichten:





- $f_1(E) = 1-p$ ,  $f_1(F) = p$
- $f_2^1(F; F) = 1$ ,  $f_2^1(F; E) = 0$ ;  $f_2^1(E; F) = p$ ,  
 $f_2^1(E; E) = 1-p$
- $f_3^2(\cdot, F; F) = 1$ ,  $f_3^2(\cdot, F; E) = 0$ ,  
 $f_3^2(E, E; E) = 1-p$ ,  $f_3^2(E, E; F) = p$ ,  
 $f_3^2(F, E; F) = 1$ ,  $f_3^2(F, E; E) = 0$

Gesucht

$$P(B_i | A) \text{ für } i \in \{1, 2, 3\},$$

wobei

$$A = \text{"irgendwo fehlgebißt"} \leftarrow \text{Koffer im Toteis nicht angekommen}$$

$$= \{ \omega \in \Omega \mid \underbrace{\omega_3 = F} \}$$

$$B_i = \text{"An } i\text{-ter Stelle fehlgebißt"}$$

$$= \{ \omega \in \Omega \mid \omega_i = F \wedge \underbrace{\omega_j = E \quad \forall j < i} \}$$

Sonst wäre der Koffer bereits an j-ter Stelle fehlgebißt

Es ist

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

Dazu:

$$\cdot P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_3 = \bar{E}\})$$

$$= 1 - \sum_{\omega \in \Omega: \omega_3 = \bar{E}} f_1(\omega_1) f_2^1(\omega_1; \omega_2) f_3^2(\omega_1, \omega_2; \bar{E})$$

$$= 1 - f_1(\bar{E}) f_2^1(\bar{E}; \bar{E}) f_3^2(\bar{E}, \bar{E}; \bar{E})$$

$$- \sum_{\omega \in \Omega} \dots$$

$$\omega_3 = \bar{E}, \omega_1 = \bar{F} \vee \omega_2 = \bar{F}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$= 0, \text{ da } f_3^2(\cdot, \bar{F}; \bar{E}) = 0$$

$$\text{und } f_3^2(\bar{F}, \bar{E}; \bar{E}) = 0$$

$$= 1 - (1-p) \cdot (1-p)(1-p) = 1 - (1-p)^3$$

$$\cdot B_1 = \{F\} \times \Omega_2 \times \Omega_3 \Rightarrow B_1 \cap A = \{(F, E, F), (F, F, F)\} \quad \text{4}$$

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap A) &= \sum_{\omega \in B_1} f_1(F) f_2^1(F; \omega_2) f_3^2(F, \omega_2; \omega_3) \\ &= f_1(F) f_2^1(F; F) f_3^2(F, F; F) + 0 \\ &= p \cdot 1 \cdot 1 = p \end{aligned}$$

$$\cdot B_2 = \{E\} \times \{F\} \times \Omega_3 \Rightarrow B_2 \cap A = \{(E, F, F)\}$$

$$\begin{aligned} P(B_2 \cap A) &= \sum_{\omega \in B_2} f_1(E) f_2^1(E; F) f_3^2(E, F; \omega_3) \\ &= f_1(E) f_2^1(E; F) f_3^2(E, F; F) + 0 \\ &= (1-p) p \cdot 1 = (1-p) \cdot p \end{aligned}$$

$$\cdot B_3 = \{E\} \times \{E\} \times \{F\} \Rightarrow B_3 \subseteq A \Rightarrow B_3 \cap A = B_3$$

$$\begin{aligned} P(B_3) &= f_1(E) f_2^1(E; E) f_3^2(E, E; F) \\ &= (1-p)^2 p \end{aligned}$$

Folglich ist

$$P(B_i | A) = \frac{1}{1 - (1-p)^3} \cdot \begin{cases} p & , i=1 \\ (1-p)p & , i=2 \\ (1-p)^2 p & , i=3 \end{cases}$$