

# Mathematik für Ingenieure C4: INF

## 4. Übung

07.05. - 11.05.2016  
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann  
Lukas Pflug  
Department Mathematik  
Universität Erlangen-Nürnberg

### Präsenzaufgabe 23:

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(n) = C3^{-n}$       b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = C \exp(-\pi x - e^{-\pi x})$

Bestimmen Sie die Konstante  $C \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion  $f$  in a) eine diskrete Dichte darstellt und in b) eine stetige Dichte.

Berechnen Sie weiterhin die Wahrscheinlichkeit  $P(X > 1)$ , wobei  $X$  gemäß den Dichten in a) und b) verteilt sei.

### Präsenzaufgabe 24:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Verteilungsfunktion darstellen:

a)  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$       b)  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{3} \\ x & \text{für } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Falls nicht, lässt sich durch einfache Änderung eine Verteilungsfunktion erstellen? Geben Sie, falls mögliche, die zugehörige Riemann-Dichte an.

### Präsenzaufgabe 25:

Es bezeichne  $X$  die Lebensdauer eines Flüssigkristallbildschirms mit Dichte

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0, \infty)}(x),$$

wobei  $\lambda > 0$  ist. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a)  $P(j < X \leq j+1)$  für  $j \in \mathbb{N}_0$ .

b)  $P(X > a)$  für  $a > 0$ .

c)  $P(X > a + b | X > a)$  für  $a, b > 0$ .

### Hausaufgabe 26:

(8 Punkte)

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $X$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \vee x > b \\ \frac{4}{(b-a)^2} x - \frac{4a}{(b-a)^2} & \text{für } a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{-4}{(b-a)^2} x + \frac{4b}{(b-a)^2} & \text{für } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass  $f$  die Eigenschaften einer Riemann-Dichte erfüllt und zeichnen Sie diese für  $a = 0$  und  $b = 4$ .

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(0.75a + 0.25b < X < 0.25a + 0.75b)$$

und stellen Sie diesen Wert in Ihrer Zeichnung für  $a = 0$  und  $b = 4$  dar.

### Hausaufgabe 27:

(4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Verteilungsfunktion darstellen:

a)  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \ln(1 + \sin x) & \text{für } 0 < x \leq \frac{3}{4}\pi \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{4}\pi \end{cases}$

b)  $F(x) = (1 - \exp(-x))1_{[0, \infty)}(x)$

### Hausaufgabe 28:

(8 Punkte)

Die Lebensdauer einer Glühlampe (in Stunden) sei exponentialverteilt mit Parameter  $\alpha = \frac{1}{400}$ . Es sei  $A_t$  das Ereignis „Die Glühlampe brennt mindestens  $t$  Stunden“.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von  $A_t$  für  $t = 600, 800$  Stunden.

b) Wie wahrscheinlich ist eine Lebensdauer zwischen 600 und 800 Stunden? Stellen Sie das Ereignis grafisch dar.

- c) Wie ändert sich die Verteilungsfunktion, wenn die Glühlampe planmäßig nach 600 Stunden ausgewechselt wird? Skizzieren Sie per Hand den Graphen der Verteilungsfunktion!

**Zusatz:** Sind die Auswertungen mit Hilfe der Tabellen für die Standardnormalverteilung möglich?

---

### Zusatzaufgabe 29:

(keine Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(n) = Cn^{-2}$ .

b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(n) = C \frac{2^n}{n!}$ .

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = C \left( (ax)1_{[0,1]}(x) + (-bx + a + b)1_{(1, \frac{a+b}{b}]}(x) \right)$ ,  
wobei  $a \geq b > 0$ .

d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = C (x(1-x))^{-\frac{1}{2}} 1_{(0,1)}(x)$ .

Bestimmen Sie die Konstante  $C \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion  $f$  in a) und b) eine diskrete Dichte darstellt sowie in c) und d) eine stetige Dichte.

Berechnen Sie weiterhin die Wahrscheinlichkeit  $P(X > 2)$ , wobei  $X$  gemäß den Dichten in a) bis d) verteilt sei.