

Mathematik für Ingenieure C4: INF

8. Übung

11.06. - 15.06.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Präsenzaufgabe 52:

Die Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von X ist also gegeben durch

$$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $|X|$ die Dichte

$$f^{|X|}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

besitzt.

b) Sind X und $|X|$ unabhängig?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $|X|$.

Präsenzaufgabe 53:

Mit $c \in \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$ sei die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_c^{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eines diskreten Zufallsvektors (X, Y) gegeben durch

$f_c^{(X,Y)}(j, k)$	j	
	-1	1
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
k	1	$\frac{1}{8} + c$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

und $f_c^{(X,Y)}(j, k) = 0$ sonst.

a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y .

b) Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Y unter der Bedingung $X = 1$.

c) Zeigen Sie: $E(X) = -2c$, $E(Y) = \frac{5}{4}$ und $E(XY) = -2c$.

d) Für welche c sind X und Y unkorreliert?

Präsenzaufgabe 54:

Die Zufallsvariablen X, Y seien unabhängig identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie für die Zufallsvariablen

$$S = 2Y + X \quad \text{und} \quad D = 2Y - X$$

die Werte $E(S)$, $\text{Var}(S)$ und $\text{Kov}(S, D)$.

Hausaufgabe 55:

(12 Punkte)

Es sei X eine ZV mit Werten in $\{0, 1, c\}$ für ein $c > 1$ und Y sei eine ZV mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$. Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung

$$f^{(X,Y)}(i, j) = P(X = i, Y = j)$$

des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte

$$(i, j) \in \{(0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (c, -1), (c, 0), (c, 1)\}$$

an:

$Y \backslash X$	$i = 0$	$i = 1$	$i = c$
$j = -1$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$j = 0$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- Berechnen Sie die Randverteilung von X und den Erwartungswert $E X$. Für welche c gilt $E X = 1$?
- Berechnen Sie $P(Y > 0 | X > 0)$.
- Betrachten Sie die Zufallsvariable $Z = X \cdot Y$. Berechnen Sie $E Z$ und $\text{Var}(Z) = E(Z^2) - (E Z)^2$. Für welche c gilt $\text{Var}(Z) = 1$?
- Sei $E Y = -\frac{1}{6}$. Ergänzen Sie unter dieser Vorgabe die fehlenden Werte der Tabelle.
- Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y . Für welche c sind X und Y unkorreliert?

Hausaufgabe 56:

(8 Punkte)

Es seien $X \sim \text{Exp}(1)$ und $Y \sim \text{Exp}(2)$ stochastisch unabhängig. Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen U und V mit

$$U = 2X + 3Y \quad \text{und} \quad V = 3X - Y.$$

Zusatzaufgabe 57:

(10 Zusatzpunkte)

- Gegeben sei die Messreihe $\mathbf{x} = (5, 3, 6, 1)$. Bestimmen Sie die Werte:

$$u_{0,5} = \boxed{}, \quad u_{0,75} - u_{0,25} = \boxed{},$$

$$\bar{x} = \boxed{}.$$

- Eine gegebene Messreihe bestehe aus $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) Daten. Geben Sie eine Formel für den Median an:

- Ein Zufallsexperiment mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ verschiedenen Ausprägungen wird n -mal wiederholt ($n \gg k$, $n \in \mathbb{N}$). Geben Sie einen Zusammenhang zwischen den relativen Häufigkeiten $h_n(j)$ und den absoluten Häufigkeiten $H_n(j)$ für $j = 1, \dots, k$ an:

- Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k \mapsto \frac{C}{4^k}$ und $C \in \mathbb{R}$. Für

$$\text{welche } C \text{ ist } f \text{ eine Z-Dichte? } C = \boxed{}.$$

- Seien X und Y stochastisch unabhängig. Dann ist

$$P^{(X+Y)}(X + Y \leq z) = \boxed{}.$$

- (Ω, \mathcal{A}, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsmodell und es seien $A, B, C, D \subset \Omega$.

Geben Sie Formeln zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

$$P(A+B) = \boxed{},$$

$$P(C \cup D) =$$

- X und Y seien stochastisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}^+$. Geben Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Werte EX, EY, EX^2 und EY^2 an (alle Werte seien als endlich vorausgesetzt):

$$E(aX - bY) = \boxed{},$$

$$\text{Var}(aX - bY) = \boxed{\phantom{a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) - 2ab\text{Cov}(X, Y)}},$$

$$\text{Kov}(X, Y) = \boxed{\phantom{\text{Kov}(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)}},$$

$$\text{Kov}(X + Y, X) = \boxed{}$$

- Gegeben sei die Abbildung $f^{(X,Y)} : [-2, -1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y)^\top \mapsto \frac{C}{x^2 y^2}$ und $C \in \mathbb{R}$.

– Für welche C ist $f^{(X,Y)}$ eine W-Dichte? $C =$.

$$-f^X(x) = \boxed{}, f^Y(y) = \boxed{},$$

$$- \text{Kov}(X, Y) =$$

- Sei X eine ZV mit der R-Dichte f^X . Dann gilt:

$$- P(a \leq x \leq b) =$$

$$- f^X(x) \in \boxed{\phantom{\mathbb{R}}} \subsetneq \mathbb{R} \, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$- F^X(x) := \boxed{} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$- F^X(x) \in \boxed{\phantom{\mathbb{R}}} \subsetneq \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Gegeben seien ein W-Modell (Ω, \mathcal{A}, P) und die Ereignisse A und B mit $A \supset B$. Dann gilt für $P(A)$ und $P(B)$ das Verhältnis

--

- Gegeben seien die identisch verteilten ZVN $X_i \sim N(1, 1)$ für $i = 1, \dots, n$

und $X := \sum_{i=1}^n X_i$. Dann ist $X \sim$.

- Gegeben seien die identisch verteilten ZVn $Y_i \sim B(p)$ für $i = 1, \dots, l$ und

$Y := \sum_{k=1}^l Y_i$. Dann ist $Y \sim$.

- Seien Z_1 und Z_2 zwei reellwertige ZVn mit der gemeinsamen R-Dichte $f^{(Z_1, Z_2)}$. Wie lautet die Integraldarstellung der Kovarianz $\text{Kov}(Z_2, Z_1)$?

$\text{Kov}(Z_2, Z_1) =$

$dz_2 dz_1$

- Gegeben seien eine reellwertige ZV Z mit einer R-Dichte f^Z und eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine weitere ZV sei durch $Y = g(Z)$ definiert.

- Wie muss z in der Gleichung $P(Y \leq y) = P(Z \leq z)$ gewählt werden,

damit diese wahr ist? $z =$

- Wie kann f^Y aus f^Z berechnet werden?

$f^Y(y) =$

- Wie lautet die Summendarstellung der Kovarianz für zwei diskrete ZVn X_1 und X_2 ?

$\text{Kov}(X_1, X_2) =$

- Welcher Werte der ZV X und welcher der ZV V muss existieren, damit $\text{korr}(X, V)$ berechnet werden kann?

- Wie ist der Binomialkoeffizient $\binom{a}{b}$ für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$ definiert?

Zusatzaufgabe 58:

(keine Punkte)

- Sei $X \sim \pi(\lambda)$ mit $P(X = 0) = 0.5$. Wie groß ist $E(X)$?
- Sei $X \sim B(10, 0.3)$. Bestimmen Sie $P(X < E(X) - 2 \text{Var}(X))$.
- Sei $X \sim B(n, p)$ mit $E(X) = 5$ und $\text{Var}(X) = 4$. Berechnen Sie n und p .
- Sei X eine gleichverteilte ZV mit Erwartungswert 1 und Varianz $\frac{4}{3}$. Berechnen Sie $P(X < 0)$.

Zusatzaufgabe 59:

(keine Punkte)

Die Körpergröße eines zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgers ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 180 (cm) und Streuung 10 (cm).

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 50 von 300 zufällig ausgewählten Männern größer als 190 cm?