

Mathematik für Ingenieure C4: INF

2. Übung

23.04. - 27.04.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Präsenzaufgabe 8:

Es werden drei unterscheidbare Würfel geworfen, deren sechs Seiten jeweils mittels „Augen“ durchnummeriert werden.

- a) Geben Sie die Ergebnismenge Ω in geeigneter Weise an.
- b) Beschreiben Sie die folgenden drei Ereignisse als Teilmenge von Ω :
 - A : Alle drei Würfel zeigen dieselbe Augenzahl.
 - B : Die Summe der Augenzahlen ist kleiner oder gleich drei.
 - C : Der Median der Augenzahlen ist echt kleiner als sechs.

Präsenzaufgabe 9:

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine geeignete Ergebnismenge Ω zur Beschreibung des Zufallsexperiments „ n -maliges Werfen eines unverfälschten Würfels“. Beschreiben Sie weiter die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω :

- a) A_k : „Der k -te Wurf ergibt 3.“ ($1 \leq k \leq n$)
- b) B_k : „Der k -te Wurf ergibt die erste 3.“ ($1 \leq k \leq n$)
- c) C : „Es wird genau eine 3 geworfen.“
- d) D : „Es wird keine 3 geworfen.“

Welche der Ereignisse B_k, C, D lassen sich durch die Ereignisse A_k ($1 \leq k \leq n$) ausdrücken? Stellen Sie gegebenenfalls B_k, C oder D mittels der A_k dar.

Präsenzaufgabe 10:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme \mathcal{A} eine σ -Algebra darstellen:

- a) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, wobei Ω beliebig ist.
- b) $\mathcal{A} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, wobei Ω beliebig ist.
- c) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, wobei Ω beliebig ist.
- d) $\mathcal{A} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, wobei $\Omega = \mathbb{R}$ ist.
- e) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, wobei Ω beliebig ist und $A \subset \Omega$.
- f) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$, wobei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ist.

Hausaufgabe 11:

(8 Punkte)

- a) Es seien A, B und C Ereignisse aus einer Ergebnismenge Ω . Stellen Sie die folgenden Ereignisse unter Verwendung von Mengenoperationen dar:
 - i) E_1 : Nur A tritt ein.
 - ii) E_2 : Wenigstens eines der Ereignisse tritt ein.
 - iii) E_3 : Genau eines der Ereignisse tritt ein.
 - iv) E_4 : Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.
- b) Ein Bogenschütze schießt und trifft auf eine Zielscheibe mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r (in Metern) mit $r > 1$. Von Interesse ist der Auftreffpunkt des Pfeils.
 - i) Geben Sie die Ergebnismenge Ω in geeigneter Weise an.
 - ii) Beschreiben Sie die folgenden drei Ereignisse als Teilmenge von Ω :
 - A : Der Auftreffpunkt hat weniger als einen Meter Abstand vom Scheibenmittelpunkt.
 - B : Der Auftreffpunkt liegt im rechten oberen Viertel der Scheibe.
 - C : Der Auftreffpunkt hat mehr als 0.5 Meter Abstand vom Scheibenmittelpunkt.

Hausaufgabe 12:**(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Datensatz der Form

$$z = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)).$$

- a) Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem für die Modellfunktion $\phi(x) = ax + b$. Lösen Sie die Normalengleichung $A^\top A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^\top y$ und geben Sie a und b in Abhängigkeit von x_i und y_i ($i = 1, \dots, n$) an.

- b) Zeigen Sie, dass

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \text{und} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

gilt.

Zusatzaufgabe 13:**(keine Punkte)**

Auf einem binären Kanal sollen Binärwörter der Länge 4 übertragen werden. Überlegen Sie, ob die nachfolgenden Mengen Ω_i , geeignete Ergebnismengen zur Beantwortung der Frage, ob ein zufällig ausgewähltes Binärwort $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_4)$ korrekt übertragen wurde, darstellen.

- a) $\Omega_1 = \{ \text{„}\omega \text{ korrekt übertragen“}, \text{„}\omega \text{ nicht korrekt übertragen“} \}$
- b) $\Omega_2 = \left\{ \underbrace{\text{„}\omega_i \text{ korrekt übertragen“}}_{=:K_i}, \underbrace{\text{„}\omega_i \text{ nicht korrekt übertragen“}}_{=:N_i} \mid i = 1, \dots, 4 \right\}$
- c) $\Omega_3 = \{(U_1, U_2, U_3, U_4) \mid U_i \in \{K_i, N_i\}, i = 1, 2, 3, 4\}$
- d) $\Omega_4 = \{(s, e) \in \{0, 1\}^4 \times \{0, 1\}^4\}$, wobei s bzw. e das gesendete bzw. das empfangene Binärwort bezeichnen.

Zusatzaufgabe 14:**(keine Punkte)**

- a) Es sei $\Omega = \{0, 1\}^2$. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega, A, B\}$$

mit

$$A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad \text{und} \quad B = \{(0, 0), (0, 1)\}$$

nicht abgeschlossen ist (also keine σ -Algebra darstellt).

Welches abgeschlossene Mengensystem \mathcal{A} wird von \mathcal{E} erzeugt?

Ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$?

- b) Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{D} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{D} keine σ -Algebra ist.

Abgabe der Hausaufgaben am 03.05.2018 bis 10 Uhr in den Briefkasten 7.1 oder 7.2 „Mathe f. Ingenieure, Dozent: Rathmann“.