

Mathematik für Ingenieure C4: INF

10. Übung

25.06. - 29.06.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Präsenzaufgabe 68:

Bei der Beladung eines LKWs mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gesamtgewicht der Ladung höchstens 7,8t beträgt. Das Gewicht (in kg) der einzelnen Kisten ist stochastisch unabhängig $R_{[105,135]}$ -verteilt.

- Berechnen Sie das Durchschnittsgewicht und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.
- Berechnen Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von 64 Kisten zwischen 7,56t und 7,8t liegt.
- Berechnen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass das zulässige Gesamtgewicht des LKWs eingehalten wird, wenn 64 Kisten aufgeladen werden.

Präsenzaufgabe 69:

Ein Eisdielenpächter wird jeden Morgen mit seinem Tagesvorrat an Eis beliefert und am Abend wird das nicht verkaufte Eis vernichtet. Er weiß, dass die Nachfrage nach Eis exponentialverteilt ist, mit einem Parameter $\lambda > 0$. Einkaufspreis einer Mengeneinheit Eis sei p_1 € und Verkaufspreis sei p_2 €.

- Wie viele Einheiten muss der Pächter jeden Tag bestellen, damit der zu erwartende Gewinn maximal wird?
- Berechnen Sie die Quantile $u_{2,5\%}$ und $u_{95\%}$ der Nachfrage-Verteilung für $\lambda = 0.001$.

Hausaufgabe 70:

(8 Punkte)

- Der Betreiber einer Kantine überlegt sich, die Warteschlangen an den Kassen dadurch zu verkürzen, dass alle Rechnungsbeträge auf jeweils ganze Euro gerundet werden. Diese Rundung führt zu Fehlern. Allerdings gleichen sich Ab- und Aufrundungsfehler mit zunehmender Anzahl von Rechnungen aus. Nehmen Sie dabei an, dass die Rundungsfehler R_i der einzelnen Rechnungen voneinander unabhängig und im Intervall $[-0.5, 0.5]$ gleichverteilt sind.

Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der aus der Summe der Rundungsfehler von 225 Rechnungen resultierende Gewinn/Verlust zwischen -5 € und $+5$ € liegt.

- Bei einem Spiel gewinnt oder verliert man in jeder Spielrunde einen Euro mit Wahrscheinlichkeit von 50%, wobei die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, d.h. nach zwei Runden sind die „Kontostände“ $+2, 0, -2$ möglich. Sei S_n der Kontostand nach n Spielen.

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(S_{10} = 2)$.

ii) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| > \frac{n}{1000})$.

Hausaufgabe 71:

(12 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und mit Parametern $\lambda_X = 1$ bzw. $\lambda_Y = 2$ exponentialverteilt. Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen $U = 2X + 3Y$ und $V = 3X - Y$ sowie die Quantile $u_{5\%}^Y$ und $u_{75\%}^Y$.

Zusatzaufgabe 72:

(keine Punkte)

Es seien $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$ und $Y = e^X$.

- Zeigen Sie, dass die Dichte von Y durch

$$f^Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}} 1_{(0,\infty)}(y)$$

gegeben ist.

- Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y .
- Bestimmen Sie den Median von Y .

Zusatzaufgabe 73: **(keine Punkte)**

In einem Produktionsprozess seien gewisse Störungen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 vorhanden, die unabhängig voneinander $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$ -verteilt seien mit Mittelwerten $a_i = 1.0/1.0/2.0/3.0$ und Streuungen $\sigma_i = 2.0/1.0/3.0/2.0$. Außerdem gebe es Folgefehler Z_1, Z_2, Z_3 , die linear von den Störungen Y_i abhängen. Es gelte

$$Z_1 = 10 + 3Y_1 + Y_3 + 2Y_4,$$

$$Z_2 = 20 - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4,$$

$$Z_3 = 5 - 4Y_2 + 5Y_3 - Y_4.$$

Bestimmen Sie

- a) die gemeinsame Verteilung von (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) ,
- b) die gemeinsame Verteilung von (Z_1, Z_2, Z_3) ,
- c) die Verteilungen der Z_i und $\text{Kov}(Z_i, Z_j)$, $i \neq j$,