

Mathematik für Ingenieure C4: INF

9. Übung

18.06. - 22.06.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Präsenzaufgabe 60:

G_1, G_2 und G_3 seien stochastisch unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Weiter seien die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 gegeben durch

$$\begin{aligned} X_1 &= 3G_1 - aG_2 + bG_3 + 2, \\ X_2 &= bG_1 + aG_2 + G_3 + 1, \\ X_3 &= aG_1 + bG_2 - 4G_3 \end{aligned}$$

mit reellen Parametern a und b .

- Berechnen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $X = (X_1, X_2, X_3)$.
- Geben Sie die R-Dichte von X an.
- Gibt es Werte für die Parameter a und b , so dass die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 stochastisch unabhängig sind?

Präsenzaufgabe 61:

An einer Bushaltestelle komme der nächste Bus nach T Minuten an. T sei gleichverteilt auf $\{1, 2, \dots, 10\}$. Jede Minute treffen Y_i mit $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ Fahrgäste ein. Y_i sei $B(5, 0.2)$ -verteilt für alle $i \in \{1, \dots, 10\}$. T, Y_1, \dots, Y_{10} seien stochastisch unabhängig. Bis zur Ankunft des Busses treffen Z Fahrgäste sein.

- Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von T und Z sowie $P(Z = k | T = t)$.
- Bestimmen Sie $E[Z | T = t]$, $\text{Var}[Z | T = t]$, $E[Z]$ und $\text{Var}[Z]$.

Hausaufgabe 62:

(10 Punkte)

Ein fairer Tetraeder wird einmal geworfen und danach wird ein fairer Würfel viermal nacheinander geworfen. Die Resultate seien T_N, X_1, X_2, X_3, X_4 , wobei $T_N \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $X_i \in \{1, \dots, 6\}$ gilt. Anschließend wird die Summe

$$Z = X_1 + \dots + X_{T_N}$$

gebildet.

- Geben Sie für den Wurf des Tetraeders ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
- Berechnen Sie Z für die Realisierung $(t_N, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 6, 5, 4, 6)$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z .

Hausaufgabe 63:

(10 Punkte)

In einem Produktionsprozess seien gewisse Störungen Y_i für $i = 1, 2, 3, 4$ vorhanden, die unabhängig voneinander $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$ -verteilt seien mit Mittelwerten

$$a_1 = 1.0, a_2 = 1.0, a_3 = 2.0, a_4 = 3.0$$

und Streuungen

$$\sigma_1 = 2.0, \sigma_2 = 1.0, \sigma_3 = 3.0, \sigma_4 = 2.0.$$

Außerdem gebe es Folgefehler Z_1, Z_2, Z_3 , die wie folgt von den Störungen Y_i abhängen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 10 + 3Y_1 + Y_3 + 2Y_4, \\ Z_2 &= 20 - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4, \\ Z_3 &= 5 - 4Y_2 + 5Y_3 + -Y_4. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) .
- Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von (Z_1, Z_2, Z_3) .
- Bestimmen Sie für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ die Verteilung von Z_i und die Kovarianz $\text{Kov}(Z_i, Z_j)$.

Zusatzaufgabe 64: (keine Punkte)

Bei der Produktion von Bauteilen (eines nach dem anderen) benötigt man für jedes Stück eine $\mathcal{N}(0.4, 1.44)$ -verteilte Bearbeitungszeit. Bei der anschließenden Kontrolle trete mit Wahrscheinlichkeit 10% ein Fehler auf. Es sei T der Zeitpunkt, zu dem der erste Fehler beobachtet wird.

- a) Bestimmen Sie, unter der Bedingung, dass nach $k = 5$ Stücken der erste Fehler auftritt, die Wahrscheinlichkeit für $T \leq t$. Bestimmen Sie außerdem den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von T .
- b) Berechnen Sie den $E[T]$ und $\text{Var}[T]$.

Zusatzaufgabe 65: (keine Punkte)

Bestimmen sie, soweit möglich, für die folgenden 3×3 Matrizen \mathbf{K}_n jeweils eine untere Dreiecksmatrix \mathbf{A}_n so, dass $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^T = \mathbf{K}_n$.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 17 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Welche der Matrizen \mathbf{K}_n sind positiv definit?