

# Mathematik für Ingenieure C4: INF

## 10. Übung

25.06. - 29.06.2018  
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann  
Dr. Lukas Pflug  
Department Mathematik  
Universität Erlangen-Nürnberg

---

### Hausaufgabe 70:

(8 Punkte)

- a) Der Betreiber einer Kantine überlegt sich, die Warteschlangen an den Kassen dadurch zu verkürzen, dass alle Rechnungsbeträge auf jeweils ganze Euro gerundet werden. Diese Rundung führt zu Fehlern. Allerdings gleichen sich Ab- und Aufrundungsfehler mit zunehmender Anzahl von Rechnungen aus. Nehmen Sie dabei an, dass die Rundungsfehler  $R_i$  der einzelnen Rechnungen voneinander unabhängig und im Intervall  $[-0.5, 0.5]$  gleichverteilt sind.

Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der aus der Summe der Rundungsfehler von 225 Rechnungen resultierende Gewinn/Verlust zwischen  $-5 \text{ €}$  und  $+5 \text{ €}$  liegt.

- b) Bei einem Spiel gewinnt oder verliert man in jeder Spielrunde einen Euro mit Wahrscheinlichkeit von 50%, wobei die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, d.h. nach zwei Runden sind die „Kontostände“  $+2, 0, -2$  möglich. Sei  $S_n$  der Kontostand nach  $n$  Spielen.

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(S_{10} = 2)$ .

ii) Berechnen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| > \frac{n}{1000})$ .

---

### Lösung.

□

a)  $X_i \sim D(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  für  $i=1, 2, \dots, 225$

Gesucht:  $P\left(\left|\sum_{i=1}^{225} X_i\right| \leq 5\right)$   
(approximativ)

Es ist

$$E\left(\sum_{i=1}^{225} X_i\right) = \sum_{i=1}^{225} E(X_i) = 0$$

$\uparrow E(X_i) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = 0 \quad \forall i$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{225} X_i\right) = \sum_{i=1}^{225} Var(X_i)$$

$\uparrow X_1, \dots, X_{225}$  unabh.

$$= \sum_{i=1}^{225} \frac{1}{12} = \frac{225}{12}$$

$\uparrow Var(X_i) = \frac{(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}))^2}{12} = \frac{1}{12} \quad \forall i$

$\Rightarrow$   $\frac{\sum_{i=1}^{225} X_i - 0}{\left(\frac{225}{12}\right)^{1/2}} \sim N(0, 1)$  ② Anwendung ZGWS  
(asymptotisch)

$$\Rightarrow P\left(\left|\sum_{i=1}^{225} X_i\right| \leq 5\right) = P(-5 \leq \sum_{i=1}^{225} X_i \leq 5)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{5-0}{\frac{15}{2\sqrt{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{-5-0}{\frac{15}{2\sqrt{3}}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\uparrow \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$= 2 \cdot \Phi(1,15) - 1 = 2 \cdot 0,8749 - 1$$

$$= 0,7498$$

② Rechnung

h) ① Sei  $N_{10}$  die Anzahl der gewonnenen Spielrunden in 10 Spielrunden.

Dann ist  $S_{10} = 2$  ist muss  $N_{10} = 6$  sein. Wofür ist

$$N_{10} \sim B(10, \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow P(S_{10} = 2) = P(N_{10} = 6)$$

$$= \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512} \quad \text{①}$$

② Es ist  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , wobei  $P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$

und  $P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Wurfo ist

3

$$E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) + (-1) \cdot P(X_i = -1) \\ = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - \underbrace{(E(X_i))^2}_{=0} \\ = 1^2 \cdot P(X_i = 1) + (-1)^2 \cdot P(X_i = -1) \\ = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| > \frac{n}{1000}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot E(X_1)\right| > \frac{n}{1000}\right)$$

$\uparrow$   $n \cdot E(X_1) = 0$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(X_1)\right| > \frac{1}{1000}\right)$$

① in geeignete Form bringen

$$= 0$$

$\uparrow$  Schwaches Gesetz der großen Zahlen

② Beachtung

iii

4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n > 0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n \cdot E(X_1)}{\sqrt{n \cdot \text{Var}(X_1)}} > 0\right)$$

② Am geeigneten Form bringen.

↑

$$n \cdot E(X_1) = 0 \wedge \text{Var}(X_1) = 1 (\neq 0)$$

$$= 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

↑ starke Gesetz der großen Zahlen

① Bedingung

Zus. Bemerkung:

Das schwache und das starke Gesetz der großen Zahlen ist anwendbar, weil:

- $E(X_i) < +\infty \quad \forall i$  und
- $\text{Var}(X_i) < +\infty \quad \forall i$  und
- $X_1, X_2, X_3, \dots$  sind stoch. unabh.

**Hausaufgabe 71:****(12 Punkte)**

Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien stochastisch unabhängig und mit Parametern  $\lambda_X = 1$  bzw.  $\lambda_Y = 2$  exponentialverteilt. Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen  $U = 2X + 3Y$  und  $V = 3X - Y$  sowie die Quantile  $u_{5\%}^Y$  und  $u_{75\%}^Y$ .

**Lösung.**

$X$  bzw.  $Y$  besitzen die Dichtefunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig sind, haben sie die Gesamtdichte

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & (x, y) > (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kovarianz berechnet sich durch

$$\text{Kov}(U, V) = EUV - EU \cdot EV.$$

Berechnung der Erwartungswerte:

$$EUV = E((2X + 3Y)(3X - Y)) = \int_0^\infty \int_0^\infty (2x + 3y)(3x - y) 2e^{-x-2y} d(x, y) = \dots = 14,$$

$$\begin{aligned} EU &= E(2X + 3Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty (2x + 3y) 2e^{-x-2y} d(x, y) \\ &= 2 \int_0^\infty x e^{-x} \underbrace{\int_0^\infty 2e^{-2y} dy}_{=1} dx + 3 \int_0^\infty y 2e^{-2y} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} dx}_{=1} dy \\ &= 2 \int_0^\infty x e^{-x} dx + 3 \int_0^\infty y 2e^{-2y} dy = 2EX + 3EY = \frac{7}{2}, \end{aligned}$$

$$EV = E(3X - Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty (3x - y) 2e^{-x-2y} d(x, y) = \dots = \frac{5}{2},$$

$$EU^2 = E(2X + 3Y)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (2x + 3y)^2 2e^{-x-2y} d(x, y) = \dots = \frac{37}{2},$$

$$EV^2 = E(3X - Y)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (3x - y)^2 2e^{-x-2y} d(x, y) = \dots = \frac{31}{2}.$$

Die Erwartungswerte können alternativ durch  $EU = 2EX + 3EY$  bzw.  $EV = 3EX - EY$  berechnet werden. Damit erhalten wir für die Kovarianz:

$$\text{Kov}(U, V) = EUV - EU \cdot EV = 14 - \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{21}{4}.$$

Den Korrelationskoeffizient von  $U$  und  $V$  berechnet sich über

$$\text{korr}(U, V) = \frac{\text{Kov}(U, V)}{\text{Str } U \text{ Str } V}.$$

Zunächst berechnen wir die dafür benötigten Varianzen:

$$\begin{aligned} \text{Var } U &= EU^2 - (EU)^2 = \frac{37}{2} - \frac{49}{4} = \frac{25}{4}, \\ \text{Var } V &= EV^2 - (EV)^2 = \frac{31}{2} - \frac{25}{4} = \frac{37}{4}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\text{korr}(U, V) = \frac{\text{Kov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var } U} \sqrt{\text{Var } V}} = \frac{21}{185} \sqrt{37}.$$

Für die exponentialverteilte Zufallsvariable  $Y$  und  $y \geq 0$  gilt

$$F^Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-\lambda_Y y}.$$

Durch Auflösen der Gleichung  $F(y) = p$  nach  $y$  erhält man die Quantilfunktion

$$(F^Y)^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda_Y} \ln(1 - p)$$

und somit die beiden Quantile

$$\begin{aligned} u_{5\%} &= (F^Y)^{-1}(0.05) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 0.05) \approx 0.0256 \\ u_{75\%} &= (F^Y)^{-1}(0.75) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 0.75) \approx 0.6931 \end{aligned}$$

□

---

**Zusatzaufgabe 72:****(keine Punkte)**

Es seien  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  mit  $\sigma > 0$  und  $Y = e^X$ .

- a) Zeigen Sie, dass die Dichte von  $Y$  durch

$$f^Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}} 1_{(0,\infty)}(y)$$

gegeben ist.

- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $Y$ .

- c) Bestimmen Sie den Median von  $Y$ .

---

**Lösung.**

□



# Lösungen

1

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{mit } \sigma > 0$$

$$\Rightarrow f^X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a)  $Y = e^X$

offenbar ist  $P(Y \leq y) = 0$  für  $y \leq 0$ .

$$\Rightarrow f^Y(y) = 0 \quad \text{für } y \leq 0.$$

Für  $y > 0$  ist

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln(y)) \\ &= F^X(\ln(y)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^Y(y) = \frac{d}{dy} F^X(\ln(y))$$

$$= f^X(\ln(y)) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\uparrow (\bar{F}^X)' = f^X$$

$$= \frac{1}{y \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\ln^2(y)}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

b) Mit der Transformationsformel für ~~12~~  
Erwartungswerte erhält man

$$E(Y) = E(e^X) = \int_{\mathbb{R}} e^x \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

↑ Benutze, dass  $\int_{\mathbb{R}} f(z) dz = 1$  für  $z \sim N(\sigma^2, \sigma^2)$  ist.

c) Gesucht ist  $\eta$  mit  $P(Y \leq \eta) = \frac{1}{2}$ .

Nach a) gilt

$$P(Y \leq 1) = F^X(\underbrace{\ln(1)}_{=0}) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \eta = 1$  ist der Median von  $Y$ .

**Zusatzaufgabe 73:****(keine Punkte)**

In einem Produktionsprozess seien gewisse Störungen  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  vorhanden, die unabhängig voneinander  $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$ -verteilt seien mit Mittelwerten  $a_i = 1.0/1.0/2.0/3.0$  und Streuungen  $\sigma_i = 2.0/1.0/3.0/2.0$ . Außerdem gebe es Folgefehler  $Z_1, Z_2, Z_3$ , die linear von den Störungen  $Y_i$  abhängen. Es gelte

$$\begin{aligned}Z_1 &= 10 + 3Y_1 + Y_3 + 2Y_4, \\Z_2 &= 20 - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4, \\Z_3 &= 5 - 4Y_2 + 5Y_3 - Y_4.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie

- a) die gemeinsame Verteilung von  $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ ,
- b) die gemeinsame Verteilung von  $(Z_1, Z_2, Z_3)$ ,
- c) die Verteilungen der  $Z_i$  und  $\text{Kov}(Z_i, Z_j)$ ,  $i \neq j$ ,

---

**Lösung.**

- a) Die gemeinsame Verteilung von  $Y$  erhalten wir aus der linearen Transformation  $Y = a + A \cdot X$ , wobei  $X \mathcal{N}(0, E_4)$  verteilt sei. In unserem Fall ist

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $Y \mathcal{N}(a, K_Y)$ -verteilt, mit

$$K_Y = AA^T = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die gemeinsame Verteilung kann man auch direkt Hinschreiben!

- b)  $Y$  ist  $\mathcal{N}(a, K_Y)$ -verteilt. Für  $Z$  gilt der lineare Zusammenhang:  $Z = b + BY$ , wobei

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $Z \mathcal{N}(c, K_Z)$ -verteilt mit

$$\begin{aligned}c &= b + Ba = \begin{pmatrix} 21 \\ 37 \\ 8 \end{pmatrix}, \\K_Z &= BK_Y B^T = \begin{pmatrix} 61 & 69 & 37 \\ 69 & 265 & 205 \\ 37 & 205 & 245 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- c) Gefragt ist nun nach den Randverteilungen  $Z_i$ . Die Randverteilungen von mehrdimensionalen Normalverteilungen sind wieder Normalverteilungen. Ist die Zufallsvariable  $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \mathcal{N}(a, K)$

verteilt, so ist die  $i$ -te Projektion  $Z_i$   $\mathcal{N}(a_i, k_{ii})$ -verteilt. Damit erhalten wir:  $Z_1$  ist  $\mathcal{N}(21, 61)$ ,  $Z_2$  ist  $\mathcal{N}(37, 265)$ ,  $Z_3$  ist  $\mathcal{N}(8, 245)$ -verteilt.

Die Kovarianzen  $\text{Kov}(Z_i, Z_j)$ ,  $i \neq j$  liest man aus der Matrix  $K_Z$  ab:

$$\begin{aligned}\text{Kov}(Z_1, Z_2) &= \text{Kov}(Z_2, Z_1) = 69, \\ \text{Kov}(Z_1, Z_3) &= \text{Kov}(Z_3, Z_1) = 37, \\ \text{Kov}(Z_2, Z_3) &= \text{Kov}(Z_3, Z_2) = 205.\end{aligned}$$

*Bemerkung: Interpretation der Kovarianz:*

- Die Kovarianz  $\text{Kov}(X, Y)$  ist positiv, wenn  $X$  und  $Y$  tendenziell einen gleichsinnigen linearen Zusammenhang besitzen, d. h. hohe Werte von  $X$  gehen mit hohen Werten von  $Y$  einher und niedrige mit niedrigen.
- Die Kovarianz  $\text{Kov}(X, Y)$  ist hingegen negativ, wenn  $X$  und  $Y$  einen gegensinnigen linearen Zusammenhang aufweisen, d. h. hohe Werte der einen Zufallsvariablen gehen mit niedrigen Werten der anderen Zufallsvariablen einher.
- Ist das Ergebnis 0, so besteht kein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Variablen  $X$  und  $Y$  (nichtlineare Beziehungen sind möglich).

□