

Mathematik für Ingenieure C4: INF

2. Übung

23.04. - 27.04.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 11:

(8 Punkte)

- a) Es seien A, B und C Ereignisse aus einer Ergebnismenge Ω . Stellen Sie die folgenden Ereignisse unter Verwendung von Mengenoperationen dar:
- i) E_1 : Nur A tritt ein.
 - ii) E_2 : Wenigstens eines der Ereignisse tritt ein.
 - iii) E_3 : Genau eines der Ereignisse tritt ein.
 - iv) E_4 : Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.
- b) Ein Bogenschütze schießt und trifft auf eine Zielscheibe mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r (in Metern) mit $r > 1$. Von Interesse ist der Auftreffpunkt des Pfeils.
- i) Geben Sie die Ergebnismenge Ω in geeigneter Weise an.
 - ii) Beschreiben Sie die folgenden drei Ereignisse als Teilmenge von Ω :
 - A : Der Auftreffpunkt hat weniger als einen Meter Abstand vom Scheibenmittelpunkt.
 - B : Der Auftreffpunkt liegt im rechten oberen Viertel der Scheibe.
 - C : Der Auftreffpunkt hat mehr als 0.5 Meter Abstand vom Scheibenmittelpunkt.

Lösung.

□

Lösungen

(a) Seien $A, B, C \subseteq \Omega$, wobei Ω eine Ergebnismenge ist.

i) $E_1 = A \cap B^c \cap C^c$ „NW A tritt ein.“ ①

ii) $E_2 = A \cup B \cup C$ „Wenigstens eines der Ereignisse tritt ein.“ ①

iii) $E_3 = (A \cap B^c \cap C^c) + (A^c \cap B \cap C^c) + (A^c \cap B^c \cap C)$ ①

„Genau eines der Ereignisse tritt ein.“

iv) $E_4 = (A \cap B \cap C)^c$
 $= A^c \cup B^c \cup C^c$ ①

„Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.“

(b) Sei $r > 1$.

i) $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \leq r\}$ ①

ii) $A = \{\omega \in \Omega \mid \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} < 1\}$ ①

$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0\}$ ①

$C = \{\omega \in \Omega \mid \frac{1}{2} < \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}\}$ ①

Hausaufgabe 12:**(12 Punkte)**

Gegeben ist ein Datensatz der Form

$$z = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)).$$

- a) Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem für die Modellfunktion $\phi(x) = ax + b$. Lösen Sie die Normalengleichung $A^\top A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^\top y$ und geben Sie a und b in Abhängigkeit von x_i und y_i ($i = 1, \dots, n$) an.

- b) Zeigen Sie, dass

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \text{und} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

gilt.

Lösung.

□

Bestimmung der linearen Ausgleichsgeraden
und Regressionsgeraden:

geg: (x_i, y_i) , ges $g(x) = ax + b$

lineares Ausgleichsproblem:

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \|A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - y\|$$

woher: $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$

Lösung ist Lösung der Normalgleichung

$$A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T y$$

das entspricht also

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \begin{pmatrix} n & -\sum x_i \\ -\sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2} \begin{pmatrix} n & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & \sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2} \begin{pmatrix} n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i) \\ -\sum x_i \sum x_i y_i + \sum x_i^2 \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum x_i y_i - \overbrace{(\sum x_i) (\sum y_i)}^{= n\bar{x}}}{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2} = \frac{n (\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})}{n (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{n} (\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})}{\frac{1}{n} (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)} = \frac{\frac{1}{n-1} (\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})}{\frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \end{aligned}$$

$$b = \frac{-\sum x_i \sum x_i y_i + (\sum x_i^2 \bar{y}_i + n \bar{x}^2 \sum y_i - n \bar{x}^2 \sum y_i)}{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum y_i + \frac{1}{n(\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)} \cdot (-\sum x_i \sum x_i y_i + n \bar{x}^2 \sum y_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum y_i + \frac{-\sum x_i y_i + \bar{x} \sum y_i}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2} \cdot \frac{1}{n} \sum x_i$$

$$n \bar{x}^2 = \bar{x} \cdot \sum x_i$$

$$= \bar{y} - \frac{\frac{1}{n-1} (\sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i)}{\frac{1}{n-1} (\sum x_i^2 - n \bar{x}^2)} \bar{x} = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x} = \bar{y} - a \bar{x}$$

Zusatzaufgabe 13:**(keine Punkte)**

Auf einem binären Kanal sollen Binärwörter der Länge 4 übertragen werden. Überlegen Sie, ob die nachfolgenden Mengen Ω_i , geeignete Ergebnismengen zur Beantwortung der Frage, ob ein zufällig ausgewähltes Binärwort $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_4)$ korrekt übertragen wurde, darstellen.

a) $\Omega_1 = \{ \text{„}\omega \text{ korrekt übertragen“}, \text{„}\omega \text{ nicht korrekt übertragen“} \}$

b) $\Omega_2 = \left\{ \underbrace{\text{„}\omega_i \text{ korrekt übertragen“}}_{=:K_i}, \underbrace{\text{„}\omega_i \text{ nicht korrekt übertragen“}}_{=:N_i} \mid i = 1, \dots, 4 \right\}$

c) $\Omega_3 = \{ (U_1, U_2, U_3, U_4) \mid U_i \in \{K_i, N_i\}, i = 1, 2, 3, 4 \}$

d) $\Omega_4 = \{ (s, e) \in \{0, 1\}^4 \times \{0, 1\}^4 \}$, wobei s bzw. e das gesendete bzw. das empfangene Binärwort bezeichnen.

Lösung.

- a) Ω_1 ist die kleinste sinnvolle Ergebnismenge. Die Elemente beschreiben alle Versuchsausgänge und sind disjunkt.
- b) Ω_2 beschreibt zwar vollständig alle Versuchsausgänge (bitweise), die beschriebenen Ergebnisse sind jedoch nicht disjunkt.
- c) Ω_3 ist vollständig und setzt sich aus disjunkten Elementen zusammen. Somit ist Ω_3 als Ergebnismenge geeignet.
- d) Die Menge Ω_4 umfasst alle gesendeten und empfangenen Binärwörter. Damit können Übertragungsfehler erkannt werden und Ω_4 ist als Ergebnismenge geeignet. Ω_4 ist sogar die feinste Ergebnismenge, die hier betrachtet wurde.

□

Zusatzaufgabe 14:**(keine Punkte)**

- a) Es sei $\Omega = \{0, 1\}^2$. Zeigen Sie, dass das Mengensystem

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \Omega, A, B\}$$

mit

$$A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad \text{und} \quad B = \{(0, 0), (0, 1)\}$$

nicht abgeschlossen ist (also keine σ -Algebra darstellt).

Welches abgeschlossene Mengensystem \mathcal{A} wird von \mathcal{E} erzeugt?

Ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$?

- b) Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und

$$\mathcal{D} = \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{D} keine σ -Algebra ist.

Lösung.

□

Lösungen

11

(a) Sei $\Sigma = \{0,1\} \times \{0,1\}$.

Beh. Σ ist eine σ -Algebra.

Bew. Es ist $A \in \Sigma$, aber

$$A^c = \{(0,0)\} \notin \Sigma. \quad (2)$$

(oder). Es ist $B \in \Sigma$, aber

$$B^c = \{(1,0), (1,1)\} \notin \Sigma. \quad (2)$$

Welche σ -Algebra \mathcal{A} wird von Σ erzeugt?

Konstruktiver Ansatz:

Es muss gelten

1) $\Omega \in \mathcal{A}$, 2) $K \in \mathcal{A} \Rightarrow K^c \in \mathcal{A}$

und 3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Bem. Beachte, dass in 3) nur endlich viele Elemente aus \mathcal{A} gewählt werden können.

Wähle also:

$$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \Omega, A, B, \underbrace{A^c, B^c}_{\text{wegen 2)}, \underbrace{A^c \cup B^c, A \cap B}_{\text{wegen 2)} \text{ wegen 2)}} \} \quad (4)$$

Bem. $A \cup B = \Omega$.

Ist $A = \mathcal{P}(\Sigma) \subset$

Nun, dann:

$\{(1,1)\} \in \mathcal{P}(\Sigma)$, aber $\{(1,1)\} \notin A$. ②

Bem.: $\Sigma = \{(0), (1), (0), (1)\}$

$\Rightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$ hat $2^4 = 16$ Elemente.

(14) Sei $\Sigma = \mathbb{N}$.

offenbar ist

$\cdot \Sigma \in \mathcal{D}$, da $\Sigma^c = \emptyset$ endlich ist,
und

$\cdot A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$, da A endlich
oder A^c endlich $\Rightarrow A^c$ endlich oder
 A endlich.

Folglich muss die "letzte" Bedingung
verletzt sein (bel. Vereinigungen abzählbarer
Mengen aus \mathcal{D} sind nicht in \mathcal{D} enthalten):
Betrachte dazu:

$$A_k := \{2k\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow A_k \in \mathcal{D} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, da A_k endlich. ④

Aber $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \underbrace{2 \cdot \mathbb{N}}_{\text{"alle geraden Zahlen"}} \notin \mathcal{D}$, da $2 \cdot \mathbb{N}$ unendlich

und $(2 \cdot \mathbb{N})^c =$ Menge aller ungeraden Zahlen unendlich. \blacksquare