

Mathematik für Ingenieure C4: INF

9. Übung

18.06. - 22.06.2018
Sommersemester 2018

Dr. Wigand Rathmann
Dr. Lukas Pflug
Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg

Hausaufgabe 62:

(10 Punkte)

Ein fairer Tetraeder wird einmal geworfen und danach wird ein fairer Würfel viermal nacheinander geworfen. Die Resultate seien T_N, X_1, X_2, X_3, X_4 , wobei $T_N \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $X_i \in \{1, \dots, 6\}$ gilt. Anschließend wird die Summe

$$Z = X_1 + \dots + X_{T_N}$$

gebildet.

- a) Geben Sie für den Wurf des Tetraeders ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell an.
- b) Berechnen Sie Z für die Realisierung
 $(t_N, x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 6, 5, 4, 6)$.
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen Z .

Lösung.

a) Tetraederwurf

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(T=i) = \frac{1}{4} \quad i=1, 2, 3, 4$$

Modell (Ω, \mathcal{A}, P) mit Ω, \mathcal{A}, P wie oben

$$b) \quad Z = \sum_{i=1}^{T_N} X_i$$

$$Z = 6 + 5 + 4 = 15$$

$$c) \quad E(Z) = E(T_N) \cdot E(X_1), \text{ da } E(X_1) = \dots = E(X_4)$$

$$E(T_N) = \frac{5}{2}, \quad E(X_i) = \frac{7}{2}$$

$$E(Z) = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{4}$$

$$\text{Var}(Z) = E(T_N) \text{Var}(X_1) + \text{Var}(T_N) (E(X_1))^2$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{35}{12} + \frac{15}{12} \cdot \frac{49}{4} = \frac{350 + 735}{48} = \frac{1085}{48}$$

$$\text{NR: } \text{Var}(T_N) = \frac{4^2 - 1}{12} = \frac{15}{12} \text{Var}(X_1) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}$$

$$490 + 245 = 735$$

Hausaufgabe 63:**(10 Punkte)**

In einem Produktionsprozess seien gewisse Störungen Y_i für $i = 1, 2, 3, 4$ vorhanden, die unabhängig voneinander $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$ -verteilt seien mit Mittelwerten

$$a_1 = 1.0, a_2 = 1.0, a_3 = 2.0, a_4 = 3.0$$

und Streuungen

$$\sigma_1 = 2.0, \sigma_2 = 1.0, \sigma_3 = 3.0, \sigma_4 = 2.0.$$

Außerdem gebe es Folgefehler Z_1, Z_2, Z_3 , die wie folgt von den Störungen Y_i abhängen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 10 + 3Y_1 + Y_3 + 2Y_4, \\ Z_2 &= 20 - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4, \\ Z_3 &= 5 - 4Y_2 + 5Y_3 + -Y_4. \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) .
 - b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von (Z_1, Z_2, Z_3) .
 - c) Bestimmen Sie für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$ die Verteilung von Z_i und die Kovarianz $\text{Kov}(Z_i, Z_j)$.
-

Lösung.

- a) Die gemeinsame Verteilung von

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$$

erhalten wir aus der linearen Transformation

$$Y = a + A \cdot X, \quad \text{wobei } X \sim \mathcal{N}(0, I_{4 \times 4})$$

verteilt ist. In unserem Fall ist

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$Y \sim \mathcal{N}(a, K_Y)$$

mit

$$K_Y = AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b) Nach a) ist $Y \sim \mathcal{N}(a, K_Y)$ verteilt. Für Z gilt der lineare Zusammenhang

$$Z = b + BY,$$

wobei

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$Z \sim \mathcal{N}(c, K_Z)$$

mit

$$c = b + Ba = \begin{pmatrix} 21 \\ 37 \\ 8 \end{pmatrix},$$
$$K_Z = BK_Y B^T = \begin{pmatrix} 61 & 69 & 37 \\ 69 & 265 & 221 \\ 37 & 221 & 245 \end{pmatrix}.$$

- c) Gefragt ist nun nach den Randverteilungen Z_i für $i = 1, 2, 3$. Die Randverteilungen von mehrdimensionalen Normalverteilungen sind wieder Normalverteilungen. Ist die Zufallsvariable $Z = (Z_1, Z_2, Z_3) \sim \mathcal{N}(c, K_Z)$, so ist $Z_i \sim \mathcal{N}(c_i, [K_Z]_{ii})$ für $i = 1, 2, 3$. Damit folgt

$$Z_1 \sim \mathcal{N}(21, 69),$$

$$Z_2 \sim \mathcal{N}(37, 265),$$

$$Z_3 \sim \mathcal{N}(8, 245).$$

Die Kovarianzen $\text{Kov}(Z_i, Z_j)$, $i \neq j$ liest man aus der Matrix K_Z ab:

$$\text{Kov}(Z_1, Z_2) = \text{Kov}(Z_2, Z_1) = 69,$$

$$\text{Kov}(Z_1, Z_3) = \text{Kov}(Z_3, Z_1) = 37,$$

$$\text{Kov}(Z_2, Z_3) = \text{Kov}(Z_3, Z_2) = 221.$$

Bemerkung: Interpretation der Kovarianz:

- Die Kovarianz $\text{Kov}(X, Y)$ ist positiv, wenn X und Y tendenziell einen gleichsinnigen linearen Zusammenhang besitzen, d. h. hohe Werte von X gehen mit hohen Werten von Y einher und niedrige mit niedrigen.
- Die Kovarianz $\text{Kov}(X, Y)$ ist hingegen negativ, wenn X und Y einen gegensinnigen linearen Zusammenhang aufweisen, d. h. hohe Werte der einen Zufallsvariablen gehen mit niedrigen Werten der anderen Zufallsvariablen einher.
- Ist das Ergebnis 0, so besteht kein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Variablen X und Y (nichtlineare Beziehungen sind möglich).

□

Zusatzaufgabe 64:**(keine Punkte)**

Bei der Produktion von Bauteilen (eines nach dem anderen) benötigt man für jedes Stück eine $\mathcal{N}(0.4, 1.44)$ -verteilte Bearbeitungszeit. Bei der anschließenden Kontrolle trete mit Wahrscheinlichkeit 10% ein Fehler auf. Es sei T der Zeitpunkt, zu dem der erste Fehler beobachtet wird.

- a) Bestimmen Sie, unter der Bedingung, dass nach $k = 5$ Stücken der erste Fehler auftritt, die Wahrscheinlichkeit für $T \leq t$. Bestimmen Sie außerdem den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von T .
- b) Berechnen Sie den $E[T]$ und $\text{Var}[T]$.

Lösung.

□

Zusatzaufgabe 65:**(keine Punkte)**

Bestimmen sie, soweit möglich, für die folgenden 3×3 Matrizen \mathbf{K}_n jeweils eine untere Dreiecksmatrix \mathbf{A}_n so, dass $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^T = \mathbf{K}_n$.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 17 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Welche der Matrizen \mathbf{K}_n sind positiv definit?

Lösung.

Aufgabe Kovarianzmatrizen

Gefragt ist nach der Choleskyzerlegung der gegebenen Matrizen. Diese ist nur möglich wenn die Matrizen positiv definit sind. Deshalb werden zuerst die Eigenwerte berechnet.

$$\mathbf{K}_1 := \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{eigenwerte}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 26.347 \\ 0.914 \\ 3.739 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 := \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{eigenwerte}(\mathbf{K}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.056 \\ 25.944 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_3 := \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{eigenwerte}(\mathbf{K}_3) = \begin{pmatrix} -0.32 \\ 5.365 \\ 20.955 \end{pmatrix}$$

Nur die Matrix \mathbf{K}_1 ist positiv definit. Die Cholesky-Zerlegung ist dann:

$$\mathbf{A}_1 := \text{cholesky}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelle: Hüber, Stochastik, Vieweg+Teubner, 5. Auflage, S120, Aufgaben 6.7.4

□