Einführung in die kategorielle Homotopietheorie

Florian Guthmann
florian.guthmann@fau.de

February 21, 2024

1 Kategorieller Hintergrund

2 (Ko)limiten

3 Kan-Erweiterungen

4 (Ko)enden

5 Simpliziale Objekte

Def (5.1.2)**.** Sei $(e_1,\dots,e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $e_0 := 0 \in \mathbb{R}^n$.

1. Der **Standard-n-Simplex** $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ ist der geordnete n-Simplex $[e_0,\dots,e_n]$.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0,\dots,n\}$ ist die affin-lineare i-te **Seitenabbildung** $f_i^n : \Delta^n n-1 \to \Delta^n$ und **Degeneration** $s_i^n : \Delta^n n+1 \to \Delta^n$ gegeben durch
$$f_i^n(e_j) = \begin{cases} e_j & j < i \\ e_{j+1} & j \geq i \end{cases} \qquad s_i^n(e_j) = \begin{cases} e_j & j \leq i \\ e_{j-1} & j > i \end{cases}$$

Def (5.2.1)**.**

1. Die **Simplexkategorie Δ** hat
   - als Objekte die endlichen Ordinalzahlen $[n] = \{0,1,\dots,n-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$
   - als Morphismen $f : [m] \to [n]$ schwach monotone Abbildungen
2. Die i-te **Seitenabbildung** $\delta_n^i : [n] \to [n+1]$ für $i \in [n+1]$ und die j-te **Degeneration** $\sigma_n^j : [n+1] \to [n]$ sind gegeben durch
$$\delta_n^i(k) = \begin{cases} k & 0 \leq k < i \\ k+1 & i \leq k < n \end{cases} \qquad \sigma_n^i = \begin{cases} k & 0 \leq k \leq j \\ k-1 & j < k \leq n \end{cases}$$

Prop (5.2.2)**.**

1. Jeder Morphismus $f : [m] \to [n]$ kann als Komposition von Seitenabbildungen und Degenerationen ausgedrückt werden:
$$f = \delta_{n-1}^{i_1} \circ \cdots \circ \delta_{m-l}^{i_k} \circ \sigma_{m-l}^{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{m-1}^{j_l}$$
wobei $n = m-l+k$ und $0 \leq i_k < \cdots < i_1 < n$, $0 \leq j_1 < \cdots < j_l < m-1$
2. Es gelten die Relationen:
$$\delta_{n+1}^i \circ \delta_n^j = \delta_{n+1}^{j+1} \circ \delta_n^i \qquad \text{für } i \leq j$$
$$\sigma_n^j \circ \sigma_{n+1}^i = \sigma_n^i \circ \delta_{n+1}^{j+1} \qquad \text{für } i \leq j$$
$$\sigma_n^j \circ \delta_n^i = \begin{cases} \delta_{n-1}^i \circ \sigma_{n-1}^{j-1} & i < j \\ 1_{[n]} & i \in \{j, j+1\} \\ \delta_{n-1}^{i-1} \circ \sigma_{n-1}^j & i > j+1 \end{cases}$$

Def (5.2.4)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.
Ein **(ko)simpliziales Objekt** in $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $S : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ ($S : \Delta \to \mathcal{C}$) und ein **(ko)simplizialer Morphismus** zwischen (ko)simplizialen Objekten S und S' ist eine natürliche Transformation $\lambda : S \Rightarrow S'$ Ein (ko)simpliziales Objekt in Set ist eine **(ko)simpliziale Menge**, ein (ko)simplizialer Morphismus in Set eine **(ko)simpliziale Abbildung**. Simpliziale Mengen und Abbildungen bilden die Kategorie $\mathsf{SSet} = \mathsf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$.

Def (5.2.7)**.** Für jedes kosimpliziale Objekt $F : \Delta \to \mathcal{C}$ in $\mathcal{C}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), -,:)\mathcal{C} \to \mathsf{SSet}$ ein Funktor der:

- einem Objekt C die simpliziale Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), C) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$
- einem Morphismus $c : C \to C'$ die simpliziale Abbildung
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), c) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), C) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), C')$$

zuweist.

6 Homotopien

7 Kan-Komplexe und Quasikategorien