Topologie und Anwendungen

https://wwwcip.cs.fau.de/~oc45ujef/lectures/topologie/topologie.tex

florian.guthmann@fau.de

5. August 2024

Grundlagen

Def (Äquivalenzrelation)**.** Sei X eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Relation auf X. Man nennt R **Äquivalenzrelation** wenn

reflexiv: $\forall x \in X.\ (x,x) \in R$

symmetrisch: $\forall x, y \in X.\ (x,y) \in R \implies (y,x) \in R$

transitiv: $\forall x, y, z \in X.\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \implies (x,z) \in R$

Def (Halbordnung)**.** Eine **Halbordnung** $\leq \subseteq M \times M$ auf einer Menge M ist eine Relation mit

Reflexivität $m \leq m$ für alle $m \in M$

Transitivität $m \leq n \wedge n \leq p \implies m \leq p$ für alle $m, n, p \in M$

Antisymmetrie $m \leq n \wedge n \leq m \implies m = n$ für alle $m, n \in M$

Eine **totale Ordnung** ist eine Halbordnung $(M, \leq)$ mit $m \leq n \vee n \leq m$ für alle $m, n \in M$.

Ein Element $x \in A$ in einer Teilmenge A einer Halbordnung M heißt **maximal**, wenn $m \leq x$ für alle $m \in A$.

Eine **Kette** in einer Halbordnung $(M, \leq)$ ist eine Teilmenge $K \subseteq M$ die total geordnet ist.

Eine Menge M heißt **induktiv geordnet** wenn jede Kette $K \subseteq M$ ein maximales Element besitzt.

Lem (Zorn)**.** Jede nicht leere induktiv geordnete Menge M besitzt ein maximales Element.

Bem (Urbilder)**.** Sei $f\colon X \to Y$, $A, B, A_i \subseteq Y$ dann gilt:

$$f^{-1}(Y) = X$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

Bem. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist

injektiv wenn $\forall a, b \in X.\ f(a) = f(b) \implies a = b$

surjektiv wenn $\forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ f(x) = y$

bijektiv wenn f injektiv und surjektiv

Def. Sei X eine Menge und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Der **Träger** von f ist die Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Def ((Ko) Einschränkung)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist die **Einschränkung** $f|_A\colon A \to Y$ gegeben durch $f|_A(x) = f(x)$.

Sei $B \subseteq Y$. Dann ist die **Koeinschränkung** die eindeutige Abbildung $f|^B\colon X \to B$ mit $f = \iota_B \circ f|^B$. Sie existiert g.d.w. $f(X) \subseteq B$.

Algebra

Def (Monoid)**.** Ein **Monoid** ist eine Menge M mit einer Abbildung $\otimes\colon M \times M \to M$ (Multiplikation) und **neutralem Element** $e \in M$ sodass

Assoziativität $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ für alle $a, b, c \in M$.

Links- und Rechtsneutralität $e \otimes a = a = a \otimes e$ für alle $a \in M$.

Def. Seien $(X, \otimes, e_X)$ und $(Y, \oplus, e_Y)$ Monoide. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Monoidhomomorphismus**, wenn

- $f(a \otimes b) = f(a) \oplus f(b)$ für alle $a, b \in X$
- $f(e_X) = e_Y$

Lem. Monoide und Monoidhomomorphismen bilden die Kategorie Mon.

Def (Gruppe)**.** Eine **Gruppe** ist ein Monoid $(M, \otimes, e)$ mit einer Abbildung $(-)^{-1}\colon M \to M$ sodass

$$a \otimes a^{-1} = e = a^{-1} \otimes a$$

für alle $a \in X$.

Eine Gruppe heißt **abelsch**, wenn $\otimes$ kommutativ ist.

Def. Seien $(X, \otimes, e_X, (-)^{-1})$ und $(Y, \otimes, e_Y, (-)^{-1})$ Gruppen. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Gruppenhomomorphismus**, wenn f ein Monoidhomomorphismus ist und

$$f\left(a^{-1}\right) = f(a)^{-1}$$

für alle $a \in X$.

Lem. Gruppen und Gruppenhomomorphismen bilden die Kategorie Grp.

Def (Körper)**.** Ein **Körper** ist eine Menge $\mathbb{F}$ mit Abbildungen $+, \cdot\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, genannt Addition und Multiplikation, sodass

- $(\mathbb{F}, +)$ bildet eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in \mathbb{F}$.
- $(X, \cdot)$ bildet einen Monoid mit neutralem Element $1 \in \mathbb{F}$.
- $\cdot$ distributiert über $+$:
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ für alle } a, b, c \in \mathbb{F}$$

Def (Vektorraum)**.** Ein Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{F}$ ist eine Menge V mit Abbildungen $+\colon V \times V \to V$ und $\cdot\colon \mathbb{F} \times V \to V$, genannt Vektoraddition und Skalarmultiplikation, sodass

- $(V, +)$ formen eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in V$.
- $a \cdot (b \cdot \mathbf{v}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{v}$ für alle $a, b \in \mathbb{F}$, $\mathbf{v} \in V$.
- $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in V$, wobei $1 \in \mathbb{F}$ das neutrale Element bezüglich der Körpermultiplikation ist.
- $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (a \cdot \mathbf{u}) + (a \cdot \mathbf{v})$ für alle $a \in \mathbb{F}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- $(a + b) \cdot \mathbf{v} = (a \cdot \mathbf{v}) + (b \cdot \mathbf{v})$ für alle $a, b \in \mathbb{F}$, $\mathbf{v} \in V$.

Def (Lineare Abbildungen)**.** Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{F}$. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **linear** wenn für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $c \in \mathbb{F}$ gilt:

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
- $f(c \cdot \mathbf{u}) = c \cdot f(\mathbf{u})$

Def (Differenzierbarkeit)**.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt **differenzierbar in einem Punkt** x_0 wenn eine lineare Abbildung $J\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - J(h)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|h\|_{\mathbb{R}^m}} = 0$$

Def. Eine Abbildung f heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar und ihre Ableitung stetig ist.

Metrische Räume

Def (Metrischer Raum)**.** Ein **metrischer Raum** ist eine Menge M mit einer Abbildung $d\colon M^2 \to \mathbb{R}$ mit

Positivität: $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \iff x = y$ für alle $x, y \in M$

Symmetrie $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in M$

Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x, y, z \in M$

Def. Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x \in M$. Der **offene Ball** von Radius r um x ist

$$\mathrm{B}_r(x) \coloneqq \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$$

Def. Eine Teilmenge S eines metrischen Raumes (M,d) heißt **beschränkt**, wenn ein $r > 0$ existiert mit $d(x,y) < r$ für alle $x, y \in M$.

Kategorientheorie

Def. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ von **Objekten**
- für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einer Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ von **Morphismen**
- für $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ einer **Kompositionsabbildung**
  $$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

sodass

- $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für alle f, g, h in den entsprechenden Hom-Mengen.
- für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ mit $\mathrm{id}_X \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_X = g$ für f, g in den entsprechenden Hom-Mengen.

Notation. $f\colon X \to Y \coloneqq f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **klein** wenn $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine echte Menge ist.

Def. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt **Isomorphismus** wenn ein $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Äquivalenzrelationen $\sim_{X,Y} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)^2$ mit

$$f \sim_{X,Y} f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \wedge g \sim_{Y,Z} g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \implies g \circ f \sim_{X,Z} g' \circ f'$$

Dann existiert die **Quotientenkategorie** $\mathcal{C}_\sim$ mit Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_\sim) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Morphismen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\sim}(X,Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) /{\sim_{X,Y}}$

Def. Eine kleine Kategorie in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist heißt **Gruppoid**.

Def (Funktor)**.** Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein **Funktor** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Zuordnung $X \mapsto F(X)$, für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- für zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einer Abbildung
  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

sodass

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$

für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$

Def (Natürliche Transformationen)**.** Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien und $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\eta\colon F \Rightarrow G$ besteht aus **Komponentenmorphismen**

$$\eta_X\colon F(X) \to G(X)$$

für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sodass

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Bem. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ Kategorien. Dann bilden Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ und natürliche Transformationen die **Funktorkategorie** $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Bsp. Für Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ weist der Funktor $\Delta\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ einem Objekt $X \in \mathcal{D}$ den **konstanten Funktor**

$$\Delta(X)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] & \mapsto & X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ Z & \mapsto & X \end{tikzcd}$$

zu.

Def ((Ko)Kegel)**.** Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kategorien. Ein Funktor $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ heißt **Diagramm** in $\mathcal{C}$.

Ein **Kegel** mit Kegelspitze $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ über einem Diagramm $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist eine natürliche Transformation $\lambda\colon \Delta(C) \Rightarrow F$, ein **Kokegel** mit Nadir $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine natürliche Transformation $\gamma\colon F \to \Delta(C)$.

Ein **Kegelmorphismus** zwischen Kegeln $\lambda\colon \Delta(C) \Rightarrow F$ und $\eta\colon \Delta(C') \Rightarrow F$ ist ein Morphismus $f\colon C \to C'$ sodass $\lambda_X = \eta_X \circ f$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$. Analog werden **Kokegelmorphismen** definiert.

Bem. Sei $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm in $\mathcal{C}$. Die Kegel über F mit Kegelmorphismen bilden die Kategorie $\mathsf{cone}(F)$. Die Kokegel über F mit Kokegelmorphismen bilden die Kategorie $\mathsf{cocone}(F)$.

Def ((Ko)Limes)**.** Sei $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm.

Ein Objekt $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Kegel $\lambda\colon \Delta(C) \Rightarrow F$ heißt **Limes** von F wenn für jeden Kegel $\eta\colon \Delta(C') \Rightarrow F$ ein eindeutiger Kegelmorphismus $h\colon C' \to C$ existiert.

Ein Objekt $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Kokegel $\gamma\colon F \Rightarrow \Delta(C)$ heißt **Kolimes** von F wenn für jeden Kokegel $\eta\colon F \Rightarrow \Delta(C')$ ein eindeutiger Kokegelmorphismus $h\colon C \to C'$ existiert.

Bsp.

- Sei $\mathcal{J}$ die leere Kategorie, $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Der Limes von F heißt dann **terminales Objekt** von $\mathcal{C}$. Der Kolimes von F heißt **initiales Objekt** von $\mathcal{C}$.
- Sei $\mathcal{J} \coloneqq \{\bullet_A \quad \bullet_B\}$, $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Der Limes von F ist das **Produkt** $F(\bullet_A) \times F(\bullet_B)$. Der Kolimes von F ist das **Koprodukt** $F(\bullet_A) + F(\bullet_B)$.
- Sei $\mathcal{J} \coloneqq \{\bullet_X \xrightarrow{p} \bullet_A \xleftarrow{q} \bullet_Y\}$, $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Der Limes von F ist der **Pullback** von $F(p)$ und $F(q)$.
- Sei $\mathcal{J} \coloneqq \{\bullet_X \xleftarrow{p} \bullet_A \xrightarrow{q} \bullet_Y\}$, $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Der Kolimes von F ist der **Pushout** von $F(p)$ und $F(q)$.

Topologische Räume und stetige Abbildungen

Def (Topologischer Raum)**.** Für eine Menge X ist $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine **Topologie** auf X wenn:

T1 $\varnothing \in \mathcal{O}_X$ und $X \in \mathcal{O}_X$

T2 wenn $O_i \in \mathcal{O}_X$ für alle $i \in I$ dann $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_X$

T3 wenn $O_i \in \mathcal{O}_X$ für alle $i \in I$ und I endlich, dann $\bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}_X$

Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heißt **offen** in $(X, \mathcal{O}_X)$ wenn $O \in \mathcal{O}_X$. Sie heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus O$ offen ist. Eine Menge die sowohl offen als auch abgeschlossen ist heißt **abgeschloffen**.

Bsp. • Auf der einelementige Menge $\{\bullet\}$ existiert genau die Topologie $\{\varnothing, \{\bullet\}\}$.

Bsp (Metrische Topologie)**.** Sei X, d ein Metrischer Raum. Die **metrische Topologie** auf X ist

$$\mathcal{O}_d := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O. \exists \varepsilon > 0. \mathrm{B}_\varepsilon(x) \subseteq O\}$$

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1$ Topologien auf X. Dann ist $\mathcal{O}_0$ **feiner** als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ **gröber** als $\mathcal{O}_0$ wenn $\mathcal{O}_0 \supseteq \mathcal{O}_1$.

Def. Für eine Menge X sind
- $\mathcal{O}_{\mathrm{dsk}} := \mathcal{P}(X)$ die **diskrete Topologie**
- $\mathcal{O}_{\mathrm{in}:=\{\varnothing, X\}}$ die **indiskrete Topologie**

Topologien auf X.

Die diskrete Topologie ist die feinste, die indiskrete Topologie die gröbste Topologie auf X.

Def. Für eine Menge X ist

$$\mathcal{O}_{\mathrm{kof}} := \{\mathcal{O} \subseteq X \mid X \setminus \mathcal{O} \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

die **kofinite Topologie** auf X.

Wenn X endlich ist gilt $\mathcal{O}_{\mathrm{dsk}} = \mathcal{O}_{\mathrm{kof}}$.

Def (Umgebung)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** eines Punktes $x \in X$ wenn eine offene Menge $O \in \mathcal{O}_X, O \subseteq U$ mit $x \in O$ existiert.

Notation. Bezeichne mit $\mathcal{U}(x)$ die Menge der Umgebungen von x.

Bem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $x \in X$. Dann gilt:
1. ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U \subseteq V$ so gilt $V \in \mathcal{U}(x)$
2. Vereinigungen von Umgebungen sind Umgebungen
3. endliche Schnitte von Umgebungen sind Umgebungen
4. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist offen g.d.w. sie eine Umgebung all ihrer Punkte ist.

Def. Ein topologischer Raum X erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom** wenn für alle $x \in X$ eine Familie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Umgebungen $U_n \in \mathcal{U}(x)$ existiert sodass für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein n mit $U_n \subseteq U$ existiert. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt dann **Umgebungsbasis**.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum.

Def (Innere)**.** Das **Innere** $\mathring{M}$ einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist

$$\mathring{M} := \bigcup_{\substack{O \in \mathcal{O}_X \\ O \subseteq M}} O$$

Def (Abschluss)**.** Der **Abschluss** $\overline{M}$ einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \subseteq X \text{ abg.} \\ M \subseteq A}} A$$

Def (Rand)**.** Der **Rand** einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist

$$\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$$

Def. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt **dicht** in X wenn $\overline{M} = X$.

Lem. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topolische Räume und Y hausdorffsch, $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ für alle a in einer dichten Teilmenge $A \subseteq X$. Dann gilt $f = g$.

Bem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt:

$$x \in \mathring{M} \iff \exists U \in \mathcal{U}(x).U \subseteq M \iff M \in \mathcal{U}(x)$$
$$x \in \overline{M} \iff \forall U \in \mathcal{U}(x).U \cap M \neq \varnothing \iff X \setminus M \notin \mathcal{U}(x)$$
$$x \in \partial M \iff \forall U \in \mathcal{U}(x).U \cap M \neq \varnothing \neq U \cap (X \setminus M)$$

Bem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $A, B \subseteq X$. Dann gilt

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \widering{A \cup B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = \widering{A \cap B}$$

Def. Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$\langle \mathcal{M} \rangle := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{O} \text{ Topologie}}} \mathcal{O}$$

die von $\mathcal{M}$ **erzeugte** Topologie. Sie ist die gröbste Topologie die $\mathcal{M}$ enthält.

Bsp. Sei X eine totale Ordnung. Dann heißt die von der Subbasis

$$\bigcup_{x \in X} \{a \in X \mid a < x\} \cup \{b \in X \mid x < b\}$$

generierte Topologie die **Ordnungstopologie** auf X.

Def. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

Subbasis der Topologie $\mathcal{O}_X$ wenn $\mathcal{O}_X$ die von $\mathcal{M}$ erzeugte Topologie ist ($\mathcal{O}_X = \langle \mathcal{M} \rangle$)

Basis der Topologie $\mathcal{O}_X$ wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}_X$ und jede Menge in $\mathcal{O}_X$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{M}$ ist.

Def. Ein topologischer Raum erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom** wenn er eine abzählbare Basis besitzt.

Bsp. Für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

Lem. Erfüllt ein Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Def. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **stetig** wenn

$$O \in \mathcal{O}_Y \implies f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$$

Bem (Stetigkeitsbedingungen)**.** Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist stetig g.d.w.
- das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq Y$ abgeschlossen in X ist.
- für alle Teilmengen $S \subseteq X$ gilt
$$f\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f(S)}$$

Bem (Top)**.** Topologische Räume und stetige Abbildungen bilden die Kategorie Top. Es gilt also:
- Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ so ist ihre Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ ebenso stetig.
- Für jeden topologischen Raum X ist die Identitätsabbildung id_X stetig.

Def. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt
- **offen** wenn Bilder offener Teilmengen offen sind

- **abgeschlossen** wenn Bilder abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen sind

Def (Homöomorphismen)**.** Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Homöomorphismus** wenn f bijektiv und die Umkehrung $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist. Zwei topologische Räume X, Y heißen **homöomorph** ($X \cong Y$) wenn ein Homöomorphismus $f\colon X \to Y$ existiert. Homöomorphismen sind die Isomorphismen in Top.

Bem. Es gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ Homöomorphismus} \\ \iff & f \text{ bijektiv und offen} \\ \iff & f \text{ bijektiv und abgeschlossen} \end{aligned}$$

Bsp (Homöomorphe Räume)**.**
- $\mathbb{R}^n \cong \mathrm{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\mathsf{D}^n \cong [0,1]^2$

Zusammenhang und Trennung

Def. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **zusammenhängend**, wenn keine disjunkte Zerlegung von X in zwei nicht leere offene Mengen O_0, O_1 existiert:
$X = O_0 \cup O_1$ mit $, O_0 \cap O_1 = \varnothing \implies O_0 = \varnothing \vee O_1 = \varnothing$

Ein topologischer Raum heißt **lokal zusammenhängend** wenn jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine zusammenhängende Umgebung von x enthält.

Def (Weg)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $x \coloneqq \gamma(0)$ und $y \coloneqq \gamma(1)$ heißt **Weg** in X von x nach y.

Seien γ und ζ Wege in X mit $\zeta(0) = \gamma(1)$. Dann existiert ein Weg $\zeta \star \gamma$ (genannt die **Verkettung** von γ und ζ) von $\gamma(0)$ nach $\zeta(1)$ gegeben durch

$$(\zeta \star \gamma)(i) = \begin{cases} \gamma(2 \cdot i) & i \in [0, 1/2] \\ \zeta(2 \cdot i - 1) & i \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Sei γ ein Weg in X. Dann existiert ein Weg $\overline{\gamma}$ (genannt die **Umkehrung** von γ) von $\gamma(1)$ nach $\gamma(0)$ gegeben durch

$$\overline{\gamma}(i) = \gamma(1 - i)$$

Def. Ein **Weg** von $x \in X$ nach $y \in X$ in einem topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Ein topologischer Raum heißt **wegzusammenhängend** wenn zu zwei Punkten $x, y \in X$ immer ein Weg γ von x nach y existiert.

Ein topologischer Raum heißt **lokal wegzusammenhängend** wenn jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung von x enthält.

Satz. Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$
- wegzusammenhängend, so ist er auch zusammenhängend
- lokal wegzusammenhängend, so ist er auch lokal zusammenhängend
- wegzusammenhängend und $f\colon X \to Y$ stetig, so ist auch $\left(f(X), \mathcal{O}_{f(X) \subseteq Y}\right)$ wegzusammenhängend.
- lokal wegzusammenhängend, so ist er wegzusammenhängend g.d.w. er zusammenhängend ist.

Def. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ existieren die Äquivalenzrelationen

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathrm{C}} y :\iff & \text{ es gibt einen Teilraum } M \subseteq X \text{ mit } x, y \in M \\ x \sim_{\mathrm{W}} y :\iff & \text{ es gibt einen Weg } \gamma\colon [0,1] \to X \text{ von } x \text{ nach } y \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse $\mathrm{C}(x)$ von $x \in X$ bezüglich $\sim_{\mathrm{C}}$ heißt **Zusammenhangskomponente**, die Äquivalenzklasse $\mathrm{W}(x)$ heißt **Wegkomponente** von x.

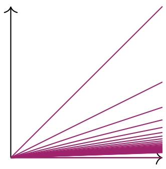
Lem. Ist eine Menge M abgeschloffen in einem topologischen Raum X, so ist M eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten in X.

Lem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ (weg)zusammenhängend und $Y \cong X$ homöomorph. Dann ist auch Y (weg)zusammenhängend.

Bsp. Besenraum

$$B = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus 0} \{(t, t/n) \mid t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist zusammenhängend und wegzusammenhängend, aber nicht lokal zusammenhängend oder lokal wegzusammenhängend.

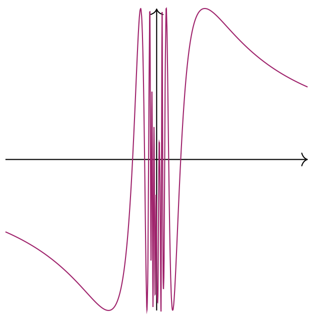


Besenraum

Sinusraum

$$S = \{(x, 1/x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

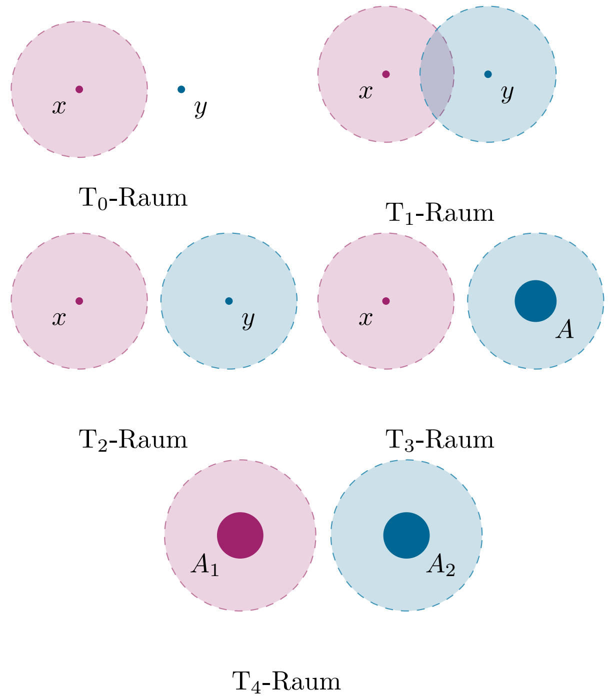
ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend oder lokal zusammenhängend oder lokal wegzusammenhängend.



Sinusraum

Lem. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ gilt:
- wenn T_2 dann T_1
- wenn T_1 dann T_0
- Ist X ein T_1-Raum so gilt $\mathrm{T}_4 \implies \mathrm{T}_3$ und $\mathrm{T}_3 \implies \mathrm{T}_2$
- normal $\implies \mathrm{T}_k, k \in \{0,1,2,3,4\}$
- regulär $\implies \mathrm{T}_k, k \in \{0,1,2,3\}$
- normal $\implies$ regulär
- Wenn X das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt gilt normal $\iff$ regulär
- Wenn $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ ein Teilraum von X ist und X ein T_k-Raum für $k \in \{0,1,2,3\}$ so ist auch M ein T_k-Raum.
- Wenn $(M, \mathcal{O}_{M \subseteq X})$ ein Teilraum von X ist, M abgeschlossen in X und X ein T_4-Raum so ist auch M ein T_4-Raum.
- Wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ ein T_4-Raum ist und $f\colon X \to Y$ surjektiv und abgeschlossen, so ist auch Y ein T_4-Raum.

Lem. Ein Raum mit der metrischen Topologie ist normal.



regulärer Raum: T_1 und T_3
normaler Raum: T_2 und T_4
Hausdorffraum: T_2

Trennungsbedingungen

Lem (Urysohn)**.** Ein Hausdorffraum ist normal g.d.w. zu zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $A_0, A_1 \subseteq X$ eine stetige Abbildung $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in A_0$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in A_1$ existiert. Dann heißt f **Urysohn-Funktion**.

Satz (Fortsetzungssatz von Tietze)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein normaler topologischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$.

Konstruktion von topologischen Räumen

Initial- und Finaltopologie

Def (Initialtopologie)**.** Sei X eine Menge, $((Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}))_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume mit Abbildungen $f_i\colon X \to Y_i$. Die **Initialtopologie** auf X ist die Topologie $\mathcal{O}_{\text{ini}}$ mit der charakteristischen Eigenschaft: Eine Abbildung $f\colon W \to X$ ist stetig g.d.w. $f_i \circ f$ stetig für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
(W, \mathcal{O}_W) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i \circ f"'] & (X, \mathcal{O}_{\text{ini}}) \arrow[d, "f_i"] \\
& (Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})
\end{tikzcd}$$

Def (Finaltopologie)**.** Sei X eine Menge, $((Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}))_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume mit Abbildungen $g_i\colon Y_i \to X$. Die **Finaltopologie** auf X ist die Topologie $\mathcal{O}_{\text{fin}}$ mit der charakteristischen Eigenschaft: Eine Abbildung $g\colon X \to W$ ist stetig g.d.w. $g \circ g_i$ stetig für alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
(W, \mathcal{O}_W) & (X, \mathcal{O}_{\text{fin}}) \arrow[l, "g"'] \\
& (Y_i, \mathcal{O}_{Y_i}) \arrow[u, "g_i"'] \arrow[ul, "g \circ g_i"]
\end{tikzcd}$$

Lem.
1. Die von einer Familie $(f_i)_{i\in I}$ induzierte Initialtopologie ist die gröbste Topologie auf X für die f_i stetig für alle $i \in I$.
2. Die von einer Familie $(g_i)_{i\in I}$ induzierte Finaltopologie ist die feinste Topologie auf X für die g_i stetig für alle $i \in I$.

Teilraumtopologie

Def. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge so ist die **Teilraumtopologie** auf M gegeben durch
$\mathcal{O}_{M\subseteq X} \coloneqq \mathcal{O}_X \cap M = \{U \subseteq M \mid \exists O \in \mathcal{O}_X . U = O \cap M\}$
die einzige Topologie auf M mit der universellen Eigenschaft:
Für alle stetigen $f\colon W \to X$ mit $f(W) \subseteq M$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{f}$ sodass

$$\begin{tikzcd}
(W, \mathcal{O}_W) \arrow[r, dotted, "\exists!\,\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & (M, \mathcal{O}_{M\subseteq X}) \arrow[d, "\iota"] \\
& (X, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Bem. Die Teilraumtopologie auf einer Teilmenge W ist die von der Inklusion $\iota\colon W \to X$ induzierte Initialtopologie.

Def. Eine Abbildung $f\colon W \to X$ heißt **Einbettung** von $(W, \mathcal{O}_W)$ in $(X, \mathcal{O}_X)$ wenn sie injektiv ist und $\mathcal{O}_W$ die von f induzierte Initialtopologie ist.

Lem. Eine injektive Abbildung $f\colon W \to X$ ist eine Einbettung g.d.w. ihre Koeinschränkung $f|^{f(W)}\colon W \to f(W), w \mapsto f(w)$ ein Homöomorphismus ist.

Quotiententopologie

Def (Quotiententopologie)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $\sim \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/\!\sim,\ x \mapsto [x]$ die kanonische Surjektion.
Die **Quotiententopologie** $\mathcal{O}_\sim$ auf $X/\!\sim$ ist die von π induzierte Finaltopologie auf $X/\!\sim$ mit der universellen Eigenschaft: Für $g\colon X \to Y$ mit $g|_{[x]}$ konstant existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{g}$ sodass

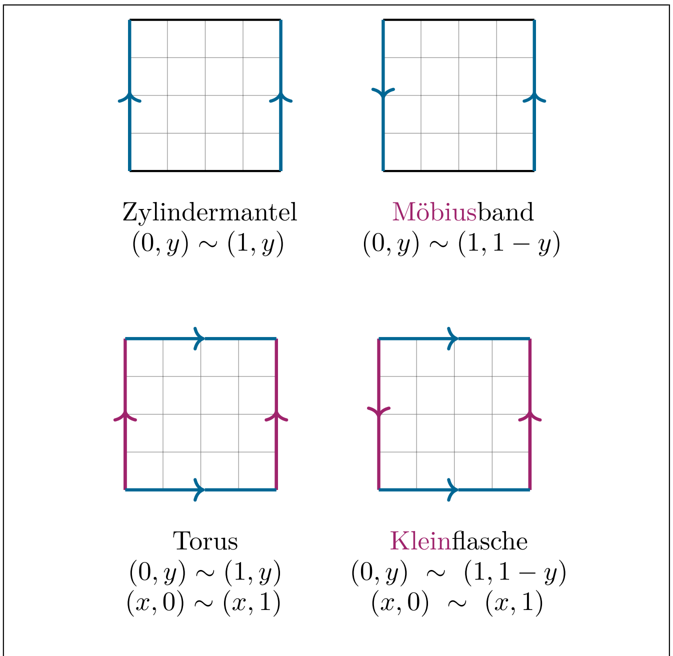
$$\begin{tikzcd}
Y & X/\!\sim \arrow[l, "\exists!\,\tilde{g}"'] \\
& X \arrow[u, "\pi"'] \arrow[ul, "g"]
\end{tikzcd}$$

Produkt- und Summentopologie

Def (Produkttopologie)**.** Sei $((X_i, \mathcal{O}_{X_i}))_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Die **Produkttopologie** ist die auf $\prod_{i\in I} X_i$ von den Projektionen $\pi_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ induzierte Initialtopologie mit der universellen Eigenschaft: Für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $f_i\colon W \to X_i$ existiert genau ein $f\colon W \to \prod_{i\in I} X_i$ sodass

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, dotted, "\exists!\,f"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[d, "\pi_i"] \\
& X_i
\end{tikzcd}$$

Def (Summentopologie)**.** Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Die **Summentopologie** ist die auf $\coprod_{i\in I} X_i$ von den Inklusionen $\iota_i\colon X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ induzierte Finaltopologie mit der universellen Eigenschaft: Für jede Familie $(f_i)_{i\in I}$ stetiger Abbildungen $f_i\colon X_i \to W$ existiert genau ein $f\colon \coprod_{i\in I} X_i \to W$ sodass



Quotienten von $[0,1]^2$

$$\begin{tikzcd}
W & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[l, dotted, "\exists!\, f"'] \\
& X_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, "\iota_i"']
\end{tikzcd}$$

Lem (Eigenschaften Produkt und Summe)**.** Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann gilt:

- Ist X_i ein $\mathrm{T_k}$-Raum (für $k \in \{0,1,2,3\}$) für alle $i \in I$ dann sind $\prod_{i\in I} X_i$, $\coprod_{i\in I} X_i$ auch $\mathrm{T_k}$-Räume.
- Ist X_i (weg)zusammenhängend für alle $i \in I$ so ist auch $\prod_{i\in I} X_i$ (weg) zusammenhängend.
- Gibt es $i \neq j \in I$ mit $X_i, X_j \neq \varnothing$, dann ist $\coprod_{i\in I} X_i$ nicht zusammenhängend.

(Ko)Faserprodukt

Def (Faserprodukt)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(A, \mathcal{O}_A)$ topologische Räume mit stetigen Abbildungen $p\colon X \to A$ und $q\colon Y \to A$. Der topologische Raum

$$X \times_A Y := \{(x,y) \in X \times Y \mid p(x) = q(y)\} \subseteq X \times Y$$

als Teilraum von $X \times Y$ mit der Produkttopologie heißt **Faserprodukt** von X und Y entlang p und q.

Bem. Das Faserprodukt zweier topologischer Räume $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ entlang der stetigen Abbildungen $p\colon X \to A$, $q\colon Y \to A$ ist der Pullback von p und q in Top, d.h. es erfüllt die universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "\exists! f"] \arrow[drr, bend left, "f_0"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\
& Y \arrow[r, "q"'] & A
\end{tikzcd}$$

Def (Kofaserprodukt)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(A, \mathcal{O}_A)$ topologische Räume und $j\colon A \to X$, $k\colon A \to Y$ stetige Abbildungen. Der topologische Raum

$$X +_A Y := X + Y /\!\sim (\iota_X \circ j)(a) \sim (\iota_Y \circ k)(a)$$

als Quotient von $X + Y$ mit der Summentopologie heißt **Kofaserprodukt** von X und Y entlang j und k.

Bem. Das Kofaserprodukt zweier topologischer Räume $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ entlang der stetigen Abbildungen $j\colon A \to X$, $k\colon A \to Y$ ist der Pushout von j und k in Top, d.h. es erfüllt die universelle Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd}
C & & \\
& X +_A Y \arrow[ul, dotted, "\exists!\, f"'] & X \arrow[l, "\iota_X"] \arrow[ull, bend right, "f_0"'] \\
& Y \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[uul, bend left, "f_1"] & A \arrow[u, "j"'] \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}$$

Kompaktheit

Def (Überdeckung)**.** Eine **(offene) Überdeckung** eines topologischen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ ist eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ von (offenen) Teilmengen $O_i \in \mathcal{P}(X)$ mit $X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. Für $J \subseteq I$ heißt $(O_j)_{j\in J}$ **Teilüberdeckung** von $(O_i)_{i\in I}$ wenn $(O_j)_{j\in J}$ eine Überdeckung von X ist.

Def. Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen eines topologischer Raums X heißt **lokal-endlich**, wenn für alle $x \in X$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert mit $A_i \cap U = \varnothing$ nur für endlich viele A_i.

Def (Partition der Eins)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X und $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $f_i\colon X \to [0,1]$. Man nennt $(f_i)_{i\in I}$ eine **Partition der Eins** wenn für alle $x \in X$:

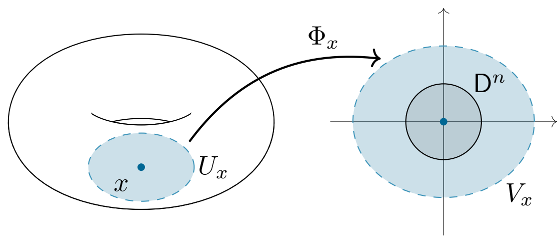
- $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$
- eine $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert in der $f_i(U) \neq \{0\}$ nur für endlich viele f_i gilt (i.e. die Träger der f_i bilden ein lokal-endliches System).

Eine Partition der Eins $(f_i)_{i\in I}$ heißt **untergeordnet** einer Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ wenn der Träger von f_i in U_i liegt.

Satz. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein normaler Raum und $(U_i)_{i\in I}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung von X so gibt es eine $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete Partition der Eins.

Def. Eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorffraum $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit Homöomorphismus $\Phi_x\colon U_x \to V_x$ auf eine offene Teilmenge $V_x \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert. (U_x, Φ_x) heißt dann **Karte** auf X.

Bem. Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit und $x \in X$ so kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $\Phi_x(x) = 0$ und $\mathsf{D}^n \subseteq V_x$



Def (Kompaktheit)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist **kompakt**, wenn für jede offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung, also eine Teilüberdeckung $J \subseteq I$ mit J endlich, existiert.

Lem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ kompakt und $Y \cong X$ homöomorph. Dann ist auch Y kompakt.

Satz (Heine-Borel)**.** Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt g.d.w. sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Kor. Jede kompakte Teilmenge eines metrische Raums ist beschränkt.

Lem. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ gilt:
- Endliche Vereinigungen von kompakten Teilmengen sind kompakt.
- Ist X hausdorffsch, so sind beliebige Schnitte kompakter Teilmengen kompakt.

Lem. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist kompakt g.d.w. für jeden topologischen Raum Y die Projektion $\pi_Y : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$ abgeschlossen ist.

Def. Sei X eine Menge, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen $A_i \subseteq X$. $(A_i)_{i \in I}$ besitzt die **endliche Durchschnittseigenschaft**, wenn $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \varnothing$ für alle endlichen $J \subseteq I$.

Lem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$. Es gilt:
- ist X hausdorffsch und M kompakt, dann ist M abgeschlossen.
- ist X kompakt und M abgeschlossen, dann ist M kompakt.

Lem. Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, dann ist $f(X) \subseteq Y$ kompakt.

Lem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum. Dann ist äquivalent:
1. X ist kompakt.
2. für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ mit $A_i \subseteq X$ abgeschlossen und $\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing$ existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq I$ mit $\bigcap_{i \in F} A_i = \varnothing$.
3. Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Satz (Tychonow)**.** Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie nicht leerer topologischer Räume. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt g.d.w. X_i kompakt für alle $i \in I$.

Def (Folgenkompaktheit)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Lem. Ein metrischer Raum ist folgenkompakt g.d.w. er kompakt ist.

Bsp.
- Der Raum $\{0, 1\}^{[0,1]}$ mit der Produkttopologie (und der diskreten Topologie auf $\{0, 1\}$) ist kompakt, aber *nicht* folgenkompakt.
- Der Raum $[0, \omega_1)$ der abzählbaren Ordinalzahlen mit der Ordnungstopologie ist folgenkompakt, aber nicht kompakt.

Stone-Čech-Kompaktifizierung

Def. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **lokalkompakt** wenn jede Umgebung eines Punkts $x \in X$ eine kompakte Umgebung von x enthält.

Lem. Ein Hausdorffraum ist lokalkompakt g.d.w. jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Lem. Jede abgeschloffene Teilmenge eines lokalkompakten topologischen Raums ist lokalkompakt mit der Teilraumtopologie.

Def (Kompaktifizierung)**.** Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und Y kompakt. Falls $\iota : X \to Y$ eine Einbettung ist und $\iota(X)$ dicht in Y, dann heißt (Y, ι) **Kompaktifizierung** von X. Wenn Y hausdorffsch ist, heißt (Y, ι) **Hausdorffkompaktifizierung** von X.

Zwei Kompaktifizierungen (Y_0, ι_0), (Y_1, ι_1) heißen **äquivalent**, wenn es einen Homöomorphismus $f : Y_0 \to Y_1$ gibt mit

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\iota_0"'] \arrow[dr, "\iota_1"] & \\ Y_0 \arrow[rr, "f"'] & & Y_1 \end{tikzcd}$$

Def (Tychonowraum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **Tychonowraum** (vollständig regulär), wenn
- X ist hausdorffsch
- Für jedes abgeschlossene $A \subseteq X$ und $x \in X \setminus A$ existiert ein stetiges $f : X \to [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ und $f|_A$ konstant 0.

Lem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum mit Hausdorffkompaktifizierung (Y, ι). Dann ist X ein Tychonowraum.

Def (Einpunktkompaktifizierung)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Die **Einpunktkompaktifizierung** (Alexandrov-Kompaktifizierung) ist die Menge $X^* := X \uplus \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_X^* := \mathcal{O}_X \cup \{O \subseteq X^* \mid X^* \setminus O \text{ kompakt}\}$$

Def (Stone-Čech-Kompaktifizierung)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum mit Hausdorffkompaktifizierung $(\beta X, \beta)$. βX heißt **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von X, wenn

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dotted, "\exists!\, h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle topologischen Räume Y und $f : X \to Y$ stetig.

Satz. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Tychonowraum. Dann existiert eine Stone-Čech-Kompaktifizierung $(\beta X, \beta)$ von X.

Satz. Stone-Čech-Kompaktifizierungen eines Tychonowraums $(X, \mathcal{O}_X)$ sind eindeutig bis auf Äquivalenz von Kompaktifizierungen.

Def (Wallman-Kompaktifizierung)**.** Sei X ein Hausdorffraum, und $\gamma\ X$ die Menge der abgeschlossenen Ultrafilter auf X. Für ein abgeschlossenes $A \subseteq X$ sei $\mathrm{cl}(A) := \{\mathcal{F} \in \gamma\ X \mid A \in \mathcal{F}\}$. Sei $\mathcal{A} := \{\mathrm{cl}(A) \mid A \subseteq X, A \text{ abgeschlossen}\}$. Dann gilt:
- $\mathcal{A}$ ist die Basis einer Topologie auf γX (über abgeschlossenen Mengen).
- die Abbildung $\gamma : X \to \gamma\ X$ ist eine Einbettung von X in $\gamma\ X$ und schickt $x \in X$ auf den eindeutigen gegen x konvergierenden Ultrafilter.
- ist $A \subseteq X$ abgeschlossen dann ist $\mathrm{cl}(A) = \overline{\gamma(A)}$. Demnach liegt $\gamma(X)$ dicht in $\gamma\ X$.
- $\gamma\ X$ ist kompakt

Folgen, Filter, Netze

Def (Folgenkonvergenz)**.** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischer Raum X **konvergiert** gegen $x \in X$ wenn zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Dann ist x der **Grenzwert** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ein $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ existieren.

Def (Folgenstetigkeit)**.** Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **folgenstetig in einem Punkt** $x \in X$ wenn für alle gegen x konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. f heißt **folgenstetig** wenn sie folgenstetig in allen $x \in X$ ist.

Lem. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Dann sind stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ folgenstetig. Wenn X das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt gilt auch die Rückrichtung.

Def. Eine Menge I heißt **gerichtet** wenn eine reflexiv und transitive Relation $\leq \subseteq I \times I$ existiert mit

$$\forall\, x, y \in I \,.\, \exists\, z \in I \,.\, x \leq z \wedge y \leq z$$

Def (Netz)**.** Ein **Netz** in einer Menge X ist eine Abbildung $\Phi\colon I \to X$, wobei I eine gerichtete Menge ist. Wir schreiben $(x_i)_{i\in I}$ statt $\Phi(I)$.

Def. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einem topologischen Raum X heißt **konvergent gegen** $x \in X$, wenn zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i_0 \in I$ existiert mit $x_i \in U$ für alle $i \geq i_0$.

Satz. Seien X und Y topologische Räume.
1. Für $A \subseteq X$ gilt $x \in \overline{A}$ g.d.w. ein Netz $(x_i)_{i\in I}, x_i \in A$ existiert das gegen x konvergiert.
2. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist stetig g.d.w. für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ das gegen $x \in X$ konvergiert gilt, dass $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Def (Filter)**.** Ein **Filter** $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ sodass:
1. $\varnothing \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$
2. wenn $F, G \in \mathcal{F}$ dann $F \cap G \in \mathcal{F}$
3. wenn $F \in \mathcal{F}$ und $F \subseteq G$, dann $G \in \mathcal{F}$

Def (Filterbasis)**.** Eine Teilmenge $\mathcal{F}_0$ eines Filters $\mathcal{F}$ heißt **Filterbasis** wenn jedes Element aus $\mathcal{F}$ ein Element aus $\mathcal{F}_0$ enthält.

Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **frei** wenn $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$. Ein nicht freier Filter heißt **fixiert**

Lem. Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}$ ist eine Filterbasis eines Filters auf X wenn für $A, B \in \mathcal{B}$ ein $C \in \mathcal{B}$ mit $C \subseteq A \cap B$ existiert.

Def (Ultrafilter)**.** Seien $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ Filter auf X. Dann heißt $\mathcal{F}_0$ **feiner** als $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_1$ **gröber** als $\mathcal{F}_0$ wenn $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{F}_1$.

Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt **Ultrafilter** wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

Satz (Tarski's Ultrafiltersatz)**.**
1. Jeder Filter $\mathcal{F}$ ist in einem Ultrafilter enthalten.
2. $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter auf X g.d.w. für jedes $A \subseteq X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.
3. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist ein fixierter Ultrafilter g.d.w. für ein $x \in X$ existiert mit $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$.

Def. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert** gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x)$.

Notation. $\mathcal{F} \longrightarrow x :\Longleftrightarrow \mathcal{F}$ konvergiert gegen x

Ein $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von einem Filter $\mathcal{F}$ wenn $F \cap U \neq \varnothing$ für alle $U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}$.

Def (Bildfilter)**.** Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X und eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt der von der Filterbasis $\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ erzeugte Filter $f(\mathcal{F})$ oder **Bildfilter** von $\mathcal{F}$ unter f.

Satz. Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$. Dann gilt:
1. $x \in \overline{A} \iff \exists$ Filter $\mathcal{F}$ auf $X. A \in \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \longrightarrow x$
2. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist stetig in $x \in X$ g.d.w. für jeden gegen x konvergierenden Filter auf X der Bildfilter unter f gegen $f(x)$ konvergiert.

Homotopietheorie

Def. Seine $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $M \subseteq X$ eine Teilmenge und $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine **Homotopie von** f **nach** g **relativ zu** M ($f \sim_M g$) ist eine stetige Abbildung $h\colon [0,1] \to X \to Y$ mit
- $h(0) = f$, $h(1) = g$
- $h(t)(m) = f(m) = g(m)$ für alle $m \in M, t \in [0,1]$.

Wenn f, g homotop relativ $\varnothing$, dann heißen f und g **homotop** ($f \sim g$).

Satz. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $M \subseteq X$. Dann ist $\sim_M$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{C}(X, Y)$ der Menge der stetigen Funktionen von X nach Y. Die Äquivalenzklassen heißen Homotopieklassen.

Bem (Homotopiekategorie)**.** Topologische Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen bilden die Quotientenkategorie hTop, punktierte topologische Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f\colon (x, X) \to (y, Y)$ mit $f(x) = y$ bilden die Kategorie $\mathsf{hTop}_\bullet$.

Def. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.
- Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Homotopieäquivalenz** wenn eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ existiert mit $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$.
- Wenn eine Homotopieäquivalenz $f\colon X \to Y$ existiert dann sind **homotopieäquivalent** ($X \simeq Y$)
- Ein topologischer Raum heißt **kontrahierbar** wenn er homotopieäquivalent zum Einpunktraum ist.

Bem. Homotopieäquivalenzen sind Isomorphismen in hTop.

Bem. Zwei Wege γ, ζ heißen homotop, wenn sie homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind.

Bsp. Homotopieäquivalenz ist eine schwächere Bedingung als Homöomorphie:

Die n-SphäreS^n ist homotopieäquivalent zu $R^{n+1} \setminus \{0\}$, aber nicht homöomorph, da S^n kompakt ist, R^{n+1} aber nicht.

Der Zylinder $\mathsf{S}^n \times \mathbb{R}$ ist homotopieäquivalent zum Kreis S^n.

Def. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ mit Inklusion $\iota\colon M \to X$. Dann heißt M
- **Retrakt** von X wenn ein stetiges $r\colon X \to M$ existiert mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_M$.
- **schwacher Deformationsretrakt** wenn ein Retrakt $r\colon X \to M$ existiert mit $\iota \circ r \sim \mathrm{id}_X$
- **starker Deformationsretrakt** wenn ein Retrakt $r\colon X \to M$ existiert mit $\iota \circ r \sim_M \mathrm{id}_X$

Satz. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum.

- Die Punkte $x \in X$ und Homotopieklassen von Wegen $\gamma\colon [0,1] \to X$ bilden mit der Verkettung von Wegen ein Gruppoid $\Pi_1(X)$, das **Fundamentalgruppoid** von X.
- Für jeden Punkt $x \in X$ bilden die Wege von x nach x mit der Verkettung von Wegen eine Gruppe, die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(x, X) = \mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, x)$ im Punkt x.

Bem. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein nicht leerer topologischer Raum und $x \in X$. Das Tupel (x, X) heißt dann ein **punktierter topologischer Raum**.

Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **punktierte Abbildung** von (x, X) nach (y, Y) wenn $f(x) = y$.

Punktierte topologische Räume und punktierte Abbildungen bilden die Kategorie $\mathsf{Top}_\bullet$.

Satz. Die Zuordnung eines topologischen Raums X zu seinem Fundamentalgruppoid $\Pi_1(X)$ bildet einen Funktor $\Pi_1\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Grpd}$.

Satz. Die Zuordnung eines punktierten topologischen Raums (x, X) zu seiner Fundamentalgruppe $\pi_1(x, X)$ in x bildet einen Funktor $\pi_1\colon \mathsf{Top}_\bullet \to \mathsf{Grp}$.

Satz (Seifert und van Kampen)**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum mit $U_0, U_1 \in \mathcal{O}_X$ und $U_0 \cup U_1 = X$. Weiterhin seien $i_n\colon U_n \to X$ und $j_n\colon U_0 \cap U_1 \to U_n$ die Inklusionsabbildungen. Dann ist $\Pi_1(X)$ der Pushout von $\Pi_1(j_0)$ und $\Pi_1(j_1)$ in Grpd:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} & & \\
& \Pi_1(X) \arrow[ul, dotted] & \Pi_1(U_0) \arrow[l, "\Pi_1(i_0)"'] \arrow[ull, bend right] \\
& \Pi_1(U_1) \arrow[u, "\Pi_1(i_1)"] \arrow[uul, bend left] & \Pi_1(U_0 \cap U_1) \arrow[l, "\Pi_1(j_1)"] \arrow[u, "\Pi_1(j_0)"']
\end{tikzcd}$$

Kor (Seifert und van Kampen (für Fundamentalgruppen))**.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum mit $U_0, U_1 \in \mathcal{O}_X$ und $U_0 \cup U_1 = X$. Weiterhin seien $i_n\colon U_n \to X$ und $j_n\colon U_0 \cap U_1 \to U_n$ die Inklusionsabbildungen. Wenn $U_0, U_1, U_0 \cap U_1$ wegzusammenhängend sind, so ist $\pi_1(x, X)$ der Pushout von $\pi_1(j_n)\colon \pi_1(x, U_0 \cap U_1) \to \pi_1(x, U_n)$ für alle $x \in U_0 \cap U_1$ in Grp:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T} & & \\
& \pi_1(x, X) \arrow[ul, dotted] & \pi_1(x, U_0) \arrow[l, "\pi_1(i_0)"'] \arrow[ull, bend right] \\
& \pi_1(x, U_1) \arrow[u, "\pi_1(i_1)"] \arrow[uul, bend left] & \pi_1(x, U_0 \cap U_1) \arrow[l, "\pi_1(j_1)"] \arrow[u, "\pi_1(j_0)"']
\end{tikzcd}$$

Überlagerungen

Def. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $q\colon X \to Y$ heißt **Überlagerung** wenn für alle $y \in Y$ ein $U \in \mathcal{U}(y)$ existiert sodass $\varnothing \neq q^{-1}(U) = \biguplus_{i \in I} V_i$ mit $V_i \subseteq X$ offen und $q|_{V_i}$ ist ein Homöomorphismus für alle $i \in I$.

Satz. Sei $q\colon X \to Y$ eine Überlagerung und $\gamma\colon [0,1] \to Y$ ein Weg mit $x \in X$, $q(x) = \gamma(0)$. Dann existiert ein eindeutiger Weg $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to X$ mit

$$q \circ \tilde{\gamma} = \gamma \qquad \tilde{\gamma}(0) = x$$

Def. Der **Abbildungsgrad** einer stetigen Abbildung $f\colon \mathsf{S}^n \to \mathsf{S}^n$ ist $\deg(f) := \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ für eine

Bsp (Fundamentalgruppe des Kreises)**.**

Beweise

Lemma von Urysohn.

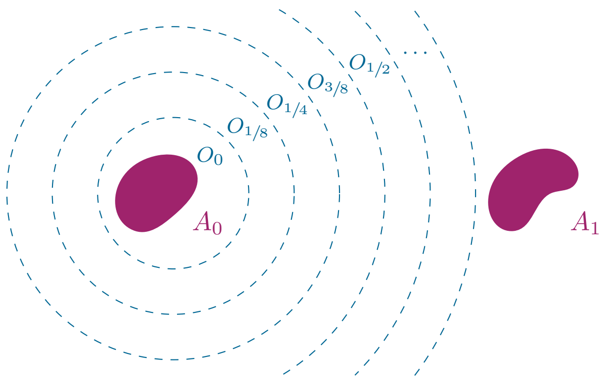
$\Leftarrow$ Betrachte die disjunkten Mengen $O_0 := f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ und $O_1 := f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Da f stetig ist sind die Mengen offen als Urbilder von den in $[0,1]$ offenen Mengen $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ und es gilt $A_0 \subseteq O_0$ und $A_1 \subseteq O_1$. Also ist X normal.

$\Rightarrow$ Ist $\varnothing = A_0 = A_1$ ist $i \mapsto 0$ eine Urysohn-Funktion. Gilt hingegen $\varnothing \neq A_0, A_1$ so sei

$$D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \subseteq [0,1]$$
$$D_n := \{k \cdot 2^{-n} \mid k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen. Idee ist nun, jedem $d \in D$ eine offene Menge $O_d \subseteq X$ zuzuordnen, sodass

- $A_0 \subseteq O_d$ für alle $d \in D$
- $\overline{A_1} \subseteq O_1 := X$ und $A_1 \cap \overline{O_d}$ für alle $d \in D \setminus \{1\}$
- $\overline{O_e} \subseteq O_d$ für alle $s < r \in D$



■

Fortsetzungssatz von Tietze. Es gelte (ohne Beweis) für $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $f(A) \subseteq [-1,1]$, dass eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [-1,1]$ existiert mit $F|_A = f$.

$\mathbb{R}$ ist homöomorph zu $\mathrm{B}_1(0) = (-1,1)$ mit $\phi\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$. Mit obigem Lemma angewandt auf $f' := \phi \circ f$ erhalten wir eine stetige Abbildung $F'\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F'|_A = f'$ und $F'(X) \subseteq [-1,1]$. Sei nun $h\colon X \to [0,1]$ die Urysohn-Funktion der disjunkten abgeschlossenen Mengen $F'^{-1}(\{-1,1\})$ und A. Dann gelten für $F''(x) = h(x) \cdot F'(x)$ die Bedingungen $F''|_A = f'$ und $F''(X) \subseteq (-1,1)$. Die gesuchte stetige Fortsetzung von f ist dann $F := \phi^{-1} \circ F''\colon X \to \mathbb{R}$. ■

Tarski's Ultrafiltersatz.

1. Sei Φ die Menge aller Filter, die feiner als $\mathcal{F}$ sind. Φ wird durch $\subseteq$ geordnet. Ist $\phi \subseteq \Phi$ eine Kette, dann ist $\bigcup_{\psi \in \phi} \psi$ ein Filter und maximales Element von ϕ. Also ist Φ induktiv geordnet und besitzt nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element, den Ultrafilter $\mathcal{G}$. ■

Satz von Tychonow.

$\Leftarrow$ Seien $p_i\colon \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ die stetigen Projektionen. Da $\prod_{i \in I} X_i \to X_i$ kompakt ist sind nach Lem. die Bilder $p_i(\prod_{i \in I} X_i) \subseteq X_i$ kompakt.

$\Rightarrow$ Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod_{i \in I} X_i \to X_i$. Dann sind die Bildfilter $p_i(\mathcal{F})$ Filter auf X_i. Da die X_i kompakt gilt $p_i(\mathcal{F}) \longrightarrow x_i$ für ein $x_i \in X_i$. $\mathcal{F}$ soll nun gegen $x \coloneqq (x_i)_{i \in I}$ konvergieren. Sei nun $U \in \mathcal{U}(x)$ offen, dann existieren $F \subseteq I$ endlich und $U_i \in \mathcal{U}(x_i)$ offen mit

$$\prod_{i \in F} U_i \times \prod_{i} X_i \subseteq U$$

Sei dann $A_i \in \mathcal{F}$ mit $p_i(A_i) \subseteq U_i$. Dann ist $A \coloneqq \bigcap_{i \in F} A_i \in \mathcal{F}$ mit $p_i(A) \subseteq U_i$ für alle $i \in F$, also $A \subseteq U$. Dann gilt $U \in \mathcal{F}$ und somit $\mathcal{F} \longrightarrow x$.

■

Literatur

[1] Catherine Meusburger. *Topologie*. 2021. URL: https://math.fau.de/wp-content/uploads/2024/01/Topologie.pdf.

[2] James R. Munkres. *Topology*. 2nd ed. Noida: Pearson, 2015.

[3] Karl-Hermann Neeb. *An Introduction to Topology*. 2017. URL: https://www.math.fau.de/wp-content/uploads/2024/01/topo.pdf.

[4] Boto Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-56860-2.