Lösungsvorschlag Probeklausur SS24

https://wwwcip.cs.fau.de/~oc45ujef/thprog/probeklausur.tex

florian.guthmann@fau.de

8. Oktober 2024

Ein *inoffizieller* Lösungsvorschlag für die Probeklausur im Sommersemester 2024 (https://www8.cs.fau.de/ext/teaching/sose2024/thprog/ProbeklausurSS24.pdf). Es gibt natürlich keine Garantie auf Richtigkeit. Verbesserungsvorschläge und etwaige Fehler gerne melden.

Aufgabe 1 Konfluenz und Terminierung

1. Wir wählen

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{f}}(x) &= x^2 \\ p_{\mathrm{g}}(x) &= x^9 \\ p_{\oplus}(x,y) &= 2 \cdot x + x \cdot y \\ p_{\sqcap}(x,y) &= x + 2 \cdot y \end{aligned}$$

auf der Domäne $\mathbb{N}_{\geq 2}$.

2. Wir benennen die Variablen im Termersetzungssystem um, sodass die vorkommenden Variablen paarweise disjunkt sind:

$$\mathrm{f}(x \oplus y) \to_0 \mathrm{f}(y) \sqcap \mathrm{f}(x) \tag{1}$$
$$a \sqcap (b \sqcap c) \to_0 (a \sqcap b) \sqcap c \tag{2}$$
$$(d \oplus e) \oplus h \to_0 d \oplus (e \oplus h) \tag{3}$$
$$\mathrm{g}(i) \to_0 \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(i))) \tag{4}$$

Nach Newman's Lemma ist ein Termersetzungssystem konfluent, wenn es stark normalisierend und lokal konfluent ist. Mit **1.** muss nur noch lokale Konfluenz gezeigt werden. Nach dem Critical Pair Lemma ist ein System lokal konfluent, wenn alle kritischen Paare zusammenführbar sind. Die drei kritischen Paare sind:

(1) und (3): Wir setzen $l_1 \coloneqq \mathrm{f}(x \oplus y) = C(\overbrace{x \oplus y}^{t})$ mit $C \coloneqq \mathrm{f}(\cdot)$ und $l_2 \coloneqq (d \oplus e) \oplus h$. Dann gilt $t \doteq l_2$ mit $\sigma \coloneqq \{x \mapsto d \oplus e\ ;\ y \mapsto h\}$. Dann ist $\langle r_1\sigma, C(r_2)\sigma \rangle$ ein kritisches Paar, also

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \mathrm{f}(h) \sqcap \mathrm{f}(d \oplus e), \mathrm{f}(d \oplus (e \oplus h)) \rangle \arrow[ddl, "(1)"', "C \coloneqq \mathrm{f}(h) \sqcap (\cdot)"] \arrow[d, "(1)"'] \\
 & \mathrm{f}(e \oplus h) \sqcap \mathrm{f}(d) \arrow[d, "(1)"', "C \coloneqq (\cdot) \sqcap \mathrm{f}(d)"] \\
\mathrm{f}(h) \sqcap (\mathrm{f}(e) \sqcap \mathrm{f}(d)) \arrow[r, "(2)"] & (\mathrm{f}(h) \sqcap \mathrm{f}(e)) \sqcap \mathrm{f}(d)
\end{tikzcd}$$

(2) und (2): Wir setzen $l_1 \coloneqq a \sqcap (b \sqcap c) = C(\overbrace{b \sqcap c}^{t})$ mit $C \coloneqq a \sqcap (\cdot)$ und benennen die Variablen in der zweiten Regel um zu: $a' \sqcap (b' \sqcap c') \to_0 (a' \sqcap b') \sqcap c'$. Dann gilt $t \doteq l_2$ mit $\sigma \coloneqq \{b \mapsto a'\ ;\ c \mapsto b' \sqcap c'\}$. Also ist das kritische Paar:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle (a \sqcap a') \sqcap (b' \sqcap c'), a \sqcap ((a' \sqcap b') \sqcap c') \rangle \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[dr, "(2)"] & \\
((a \sqcap a') \sqcap b') \sqcap c' & & (a \sqcap (a' \sqcap b')) \sqcap c' \arrow[ll, "(2)"', "C \coloneqq (\cdot) \sqcap c'"]
\end{tikzcd}$$

(3) und (3): Wir setzen $l_1 \coloneqq (d \oplus e) \oplus h = C(\overbrace{d \oplus e}^{t})$ mit $C \coloneqq (\cdot) \oplus h$ und benennen die Variablen in der zweiten Regel um zu: $(d' \oplus e') \oplus h' \to_0 d' \oplus (e' \oplus h')$. Dann gilt $t \doteq l_2$ mit $\sigma \coloneqq \{d \mapsto d' \oplus e'\ ;\ e \mapsto h'\}$. Also ist das kritische Paar:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle (d' \oplus e') \oplus (h' \oplus h), (d' \oplus (e' \oplus h')) \oplus h \rangle \arrow[dl, "(3)"'] \arrow[dr, "(3)"] & \\
d' \oplus (e' \oplus (h' \oplus h)) & & d' \oplus ((e' \oplus h') \oplus h) \arrow[ll, "(3)"', "C \coloneqq d' \oplus (\cdot)"]
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 System F

1. Der bisherige Typherleitungsbaum ist:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$(x\colon a), (l\colon \mathbb{L}\ a), (u\colon r), (f\colon a \to r \to r) \vdash l\ (f\ x\ u)\ f : r$}
\RightLabel{$\to_{\mathrm{i}}$}
\UnaryInfC{$(x\colon a), (l\colon \mathbb{L}\ a), (u\colon r) \vdash \lambda f.\, l\ (f\ x\ u)\ f : (a \to r \to r) \to r$}
\RightLabel{$\to_{\mathrm{i}}$}
\UnaryInfC{$(x\colon a), (l\colon \mathbb{L}\ a) \vdash \lambda u\, f.\, l (f\ x\ u) f : r \to (a \to r \to r) \to r$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{i}}$}
\UnaryInfC{$(x\colon a), (l\colon \mathbb{L}\ a) \vdash \lambda u\, f.\, l\ (f\ x\ u) f : \mathbb{L}\ a$}
\RightLabel{$\to_{\mathrm{i}}$}
\UnaryInfC{$(x\colon a) \vdash \lambda l.\, \lambda u\, f.\, l\ (f\ x\ u)\ f : \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a$}
\RightLabel{$\to_{\mathrm{i}}$}
\UnaryInfC{$\vdash \lambda x\, l.\, \lambda u\, f.\, l\ (f\ x\ u)\ f : a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a$}
\RightLabel{$\forall_{\mathrm{i}}$}
\UnaryInfC{$\vdash \mathrm{snoc} \colon \forall a.\, a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a$}
\end{prooftree}$$

Die sechs angewendeteten Regeln sind also $\forall_{\mathrm{i}}, \to_{\mathrm{i}}, \to_{\mathrm{i}}, \forall_{\mathrm{i}}, \to_{\mathrm{i}}, \to_{\mathrm{i}}$

2. Wir setzen $\Gamma \coloneqq (x\colon a), (l\colon \mathbb{L}\ a), (u\colon r), (f\colon a \to r \to r)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash l \colon \mathbb{L}\ a}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash l \colon r \to (a \to r \to r) \to r}\,\forall_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash f \colon a \to r \to r}\,\text{Ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash x \colon a}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash f\ x \colon r \to r}\,\to_e \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash u \colon r}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash f\ x\ u \colon r}\,\to_e}{\dfrac{\Gamma \vdash l\ (f\ x\ u) \colon (a \to r \to r) \to r \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash f \colon a \to r \to r}\,\text{Ax}}{\Gamma \vdash l\ (f\ x\ u) f \colon r}\,\to_e}\,\to_e$$

3.

$\text{rev} \colon \forall\, a.\, \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a$

$\text{rev} = \lambda\, l.\, l\ \text{nil}\ \text{snoc}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash l \colon \mathbb{L}\ a}\,\text{Ax}}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash l \colon \mathbb{L}\ a \to (a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a) \to \mathbb{L}\ a}\,\forall_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash \text{nil} \colon \forall\, a.\, \mathbb{L}\ a}\,\text{Ax}}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash \text{nil} \colon \mathbb{L}\ a}\,\forall_e}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash l\ \text{nil} \colon (a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a) \to \mathbb{L}\ a}\,\to_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash \text{snoc} \colon \forall a.\, a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a}\,\text{Ax}}{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash \text{snoc} \colon a \to \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a}\,\forall_e}{\dfrac{\Gamma, (l \colon \mathbb{L}\ a) \vdash l\ \text{nil}\ \text{snoc} \colon \mathbb{L}\ a}{\dfrac{\Gamma \vdash \lambda\, l.\, l\ \text{nil}\ \text{snoc} \colon \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a}{\Gamma \vdash \text{rev} \colon \forall\, a.\, \mathbb{L}\ a \to \mathbb{L}\ a}\,\forall_i}\,\to_i}\,\to_e$$

Aufgabe 3 Strukturelle Induktion und Folds

1. Wir arbeiten mit HNil: $\mathsf{HList}\ a\ b$, da $(() \to X) \cong X$.

$\text{swap} \colon \mathsf{HList}\ a\ b \to \mathsf{HList}\ b\ a$

$\text{swap}\ \text{HNil} = \text{HNil}$

$\text{swap}\ (\text{ConsA}\ x\ zs) = \text{ConsB}\ x\ (\text{swap}\ zs)$

$\text{swap}\ (\text{ConsB}\ y\ zs) = \text{ConsA}\ y\ (\text{swap}\ zs)$

Beweis per struktureller Induktion über zs:

$zs = \text{HNil}$, dann ist

$$\begin{aligned} & \text{swap}\ (\text{swap}\ zs) \\ =\ & \text{swap}\ (\text{swap}\ \text{HNil}) \\ =\ & \text{swap}\ \text{HNil} = \text{HNil} \\ =\ & zs \end{aligned}$$

$zs = \text{ConsA}\ x\ xs$, dann ist

$\textbf{IH} \coloneqq \text{swap}\ (\text{swap}\ xs) = xs$

und

$$\begin{aligned} & \text{swap}\ (\text{swap}\ zs) \\ =\ & \text{swap}\ (\text{swap}\ (\text{ConsA}\ x\ xs)) \\ =\ & \text{swap}\ (\text{ConsB}\, x\ (\text{swap}\ xs)) \\ =\ & \text{ConsA}\ x\ (\text{swap}\ (\text{swap}\ xs)) \\ \overset{\textbf{IH}}{=}\ & \text{ConsA}\ x\ xs \\ =\ & zs \end{aligned}$$

$zs = \text{ConsB}\ y\ ys$, dann ist

$\textbf{IH} \coloneqq \text{swap}\ (\text{swap}\ ys) = ys$

und

$$\begin{aligned} & \text{swap}\ (\text{swap}\ zs) \\ =\ & \text{swap}\ (\text{swap}\ (\text{ConsB}\ y\ ys)) \\ =\ & \text{swap}\ (\text{ConsA}\, y\ (\text{swap}\ ys)) \\ =\ & \text{ConsB}\ x\ (\text{swap}\ (\text{swap}\ ys)) \\ \overset{\textbf{IH}}{=}\ & \text{ConsB}\ y\ ys \\ =\ & zs \end{aligned}$$

2. Beweis per struktureller Induktion über zs:

$zs = \text{HNil}$, dann ist

$$\begin{aligned} & \text{mapA}\ f (\text{mapB}\ g\ zs) \\ =\ & \text{mapA}\ f\ (\text{mapB}\ g\ \text{HNil}) \\ =\ & \text{mapA}\ f\ \text{HNil} \\ =\ & \text{HNil} \\ =\ & \text{mapB}\ g\ \text{HNil} \\ =\ & \text{mapB}\ g\ (\text{mapA}\ f\ \text{HNil}) \\ =\ & \text{mapB}\ g\ (\text{mapA}\ f\ zs) \end{aligned}$$

$zs = \text{ConsA}\ x\ xs$, dann ist

$\textbf{IH} \coloneqq \forall\, f, g.\, \text{mapA}\ f\ (\text{mapB}\ g\, xs) = \text{mapB}\ g\, (\text{mapA}\ f\, xs)$

und

$$\begin{aligned} & \text{mapA}\ f (\text{mapB}\ g\ zs) \\ =\ & \text{mapA}\ f\ (\text{mapB}\ g\ (\text{ConsA}\ x\ xs)) \\ =\ & \text{mapA}\ f\ (\text{ConsA}\ x\ (\text{mapB}\ g\ xs)) \\ =\ & \text{ConsA}\ (f\ x)(\text{mapA}\ f\ (\text{mapB}\, g\ xs)) \\ \overset{\textbf{IH}}{=}\ & \text{ConsA}\ (f\ x)(\text{mapB}\, g\ (\text{mapA}\ f\ xs)) \\ =\ & \text{mapB}\, g\ (\text{ConsA}\ (f\ x)(\text{mapA}\ f\ xs)) \\ =\ & \text{mapB}\, g\ (\text{mapA}\ f\ (\text{ConsA}\ x\ xs)) \\ =\ & \text{mapB}\, g\ (\text{mapA}\ f\ zs) \end{aligned}$$

$zs = \text{ConsB}\ y\ ys$, analog zu ConsA.

3.

$\text{foldH} \colon c \to (a \to c \to c) \to (b \to c \to c) \to \mathsf{HList}\ a\ b \to c$

$\text{foldH}\ n\ ca\ cb\ \text{HNil} = n$

$\text{foldH}\ n\ ca\ cb\ (\text{ConsA}\ x\ zs) = ca\ x\ (\text{foldH}\ n\ ca\ cb\ zs)$

$\text{foldH}\ n\ ca\ cb\ (\text{ConsB}\ y\ zs) = cb\ y\ (\text{foldH}\ n\ ca\ cb\ zs)$

4.

$\text{mapA} \colon (a \to c) \to \mathsf{HList}\ a\ b \to \mathsf{HList}\ c\ b$

$\text{mapA}\ f = \text{foldH}\ \text{HNil}\ (\lambda\, x.\, \text{ConsA}\ (f\ x))\ \text{ConsB}$

$\text{mapB} \colon (b \to c) \to \mathsf{HList}\ a\ b \to \mathsf{HList}\ a\ c$

$\text{mapB}\ g = \text{foldH}\ \text{HNil}\ \text{ConsA}\ (\lambda\, y.\, \text{ConsB}\ (g\ y))$

Aufgabe 4 Korekursion und Koinduktion

Eine Relation $R \subseteq (\mathsf{Stream}\ a) \times (\mathsf{Stream}\ a)$ ist eine *Bisimulation* wenn für $(x, y) \in R$ gilt:

- $\mathrm{hd}\ x = \mathrm{hd}\ y$
- $(\mathrm{tl}\ x)\ R\ (\mathrm{tl}\ y)$

1. Wir raten (oder inferieren aus den kommenden Aufgaben), dass

$$\mathrm{map}\ \mathrm{hd}\ (\mathrm{transpose}\ s) = \mathrm{hd}\ s$$

gelten muss.

2. Wir setzen

$$R \coloneqq \{(\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ s), \mathrm{transpose}\ (\mathrm{tl}\ s)) \mid s \in \mathsf{Stream}\ a\}$$

und zeigen, dass R eine Bisimulation ist. Sei also $(\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ s), \mathrm{transpose}\ (\mathrm{tl}\ s)) \in R$:

- $$\begin{aligned} & \mathrm{hd}\ (\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ = {} & \mathrm{tl}\ (\mathrm{hd}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ = {} & \mathrm{tl}\ (\mathrm{map}\ \mathrm{hd}\ s) \\ = {} & \mathrm{map}\ \mathrm{hd}\ (\mathrm{tl}\ s) \\ = {} & \mathrm{hd}\ (\mathrm{transpose}\ (\mathrm{tl}\ s)) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \mathrm{tl}\ (\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ = {} & \mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ = {} & \mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ (\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ s)) \\ R {} & \mathrm{transpose}(\mathrm{tl}\ (\mathrm{map}\,\mathrm{tl}\ s)) \\ = {} & \mathrm{transpose}\ (\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{tl}\ s)) \\ = {} & \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ (\mathrm{tl}\ s)) \end{aligned}$$

3. Nun setzen wir

$$R \coloneqq \{(\mathrm{transpose}\ (\mathrm{transpose}\ s), s) \mid s \in \mathsf{Stream}\ a\}$$

Sei $(\mathrm{transpose}\ (\mathrm{transpose}\ s), s) \in R$:

- $$\begin{aligned} & \mathrm{hd}\ (\mathrm{transpose}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ = {} & \mathrm{map}\ \mathrm{hd}\ (\mathrm{transpose}\ s) \\ \stackrel{(1.)}{=} {} & \mathrm{hd}\ s \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ = {} & \mathrm{transpose}\ (\mathrm{map}\ \mathrm{tl}\ (\mathrm{transpose}\ s)) \\ \stackrel{(2.)}{=} {} & \mathrm{transpose}\ (\mathrm{transpose}\ (\mathrm{tl}\ s)) \\ R {} & \mathrm{tl}\ s \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Minimierung endlicher Automaten

Im Automaten sind die Zustände $\mathbf{q_3}, \mathbf{q_4}$ nicht erreichbar.

	$\mathbf{q_1}$	$\mathbf{q_2}$	$\mathbf{q_5}$	$\mathbf{q_6}$	$\mathbf{q_7}$	$\mathbf{q_8}$	$\mathbf{q_9}$
$\mathbf{q_0}$		0	0	0	0	0	0
$\mathbf{q_1}$		0	0	0	0	0	0
$\mathbf{q_2}$					1	1	1
$\mathbf{q_5}$					1	1	1
$\mathbf{q_6}$					1	1	1
$\mathbf{q_7}$						2	2
$\mathbf{q_8}$							2