

Berechenbarkeit und die Philosophie der Mathematik

Kaludercic, Philip
Informatik, 6. Semester (BA)
22423250

Sommersemester 2020

Zusammenfassung

Die Berechenbarkeitstheorie ist ein Fundament der theoretischen Informatik, es hat aber auch wichtige Implikationen für die praktische Arbeit mit Rechnern und Algorithmen. Doch kann es auch etwas über Grundfragen der Philosophie der Mathematik aussagen?

Inhaltsverzeichnis

Berechenbarkeit	1
<i>Indispensability</i> der Mathematik	2
Das Universum als Berechnung	3
Berechenbarkeit in natürlichen Systemen	3
Subatomere Berechenbarkeit	4
Fundamental-Physik als Ausdruck von Berechnung	4
Zelluläre Automaten	5
Anmerkung zur Beweisbarkeit	5
Zusammenfassung	5

DIE INFORMATIK IST AUS DEM VERSAGEN GRÖßERER WÜNSCHE GEBOREN WORDEN.

Große Mathematiker und Philosophen, wie Ramon Llull oder Gottfried Wilhelm Leibniz dachten über die Möglichkeit nach “Rechenmaschinen” zu benutzen, um Beweise in der Mathematik und der Philosophie zu automatisieren – dieses hätte effektiv dem “lösen der Mathematik” *per se* geglichen. Anfang des 20. Jahrhunderts formalisierten und stellten David Hilbert und Wilhelm Ackermann das “Entscheidungsproblem”. Es handelt sich hierbei um [2, S. 119]:

[D]as Problem, die Allgemeingültigkeit von Ausdrücken festzustellen, oder auch das duale Problem der Feststellung der Erfüllbarkeit von Ausdrücken

Diese Wunschvorstellung, welche dem Geist ihrer Zeit entsprach, wurde jedoch von Alan Turing[4] und Alonzo Church[1] parallel widerlegt. Aus dieser Erkenntnis, dass unterschieden werden muss zwischen dem *Berechenbarem* und dem *Unberechenbarem*, entstand zunächst auch die Informatik, aber auch das theoretische Teilgebiet der Berechenbarkeitstheorie.

Im Folgenden sollen Fragen aus der Philosophie der Mathematik betrachtet werden, unter dem Gesichtspunkt der “Berechenbarkeit”. Spezifisch soll untersucht werden, ob die Phänomene und Probleme der Berechenbarkeitstheorie Hinweise geben können auf Fragen wie der notwendigen oder eigenständigen Existenz der Mathematik.

Davor sollen aber zuerst die wichtigen Begriffe und Konzepte vorgestellt werden.

Berechenbarkeit

Für Turing war “Berechenbarkeit” eine Eigenschaft von Zahlen[4, S. 230]

The “computable” numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as decimal are calculable by finite means.

Auf dem ersten Blick scheint dieses unscheinbar zu sein. Der Begriff *berechenbar* soll alles beschreiben, was Mensch oder Maschine mit festen Regeln *berechnen*

kann. Obwohl das Konzept intuitiv nachvollziehbar ist, wird zur formalen Analyse das Konzept der “Turing Maschine” herangebracht¹.

Die Details sind für diesen Text irrelevant, wichtig ist nur, dass diese Maschine anhand eines formalen Programms, und eines unendlichen Speicherbandes, eine (endliche) Eingabe einlesen und verarbeiten kann. Abhängig vom Programm, kann die Maschine *halten*, und es gibt eine binäre Ausgabe aus (“Ja” oder “Nein”, “1” oder “0”, ...).

Richtig kodiert, können viele Probleme als Programme aufgeschrieben und gelöst werden: Arithmetische und algebraische Probleme auf aufzählbaren Zahlenmengen, über physikalische Simulationen bis hin zur Möglichkeit Turing Maschinen selbst zu emulieren.

Spezifisch der letzte Punkt, die Fähigkeit sich selbst zu Emulieren, stellt sich als interessant dar. Turing benutzt dieses um ein Beispiel eines “unberechenbaren” Problems zu demonstrieren.

Eine Turing Maschine, welche in der Lage ist eine kodierte Turing Maschine, samt Eingabe einzulesen, und laufen zu lassen, wird eine “Universelle Turing Maschine” genannt. In den meisten Fällen erweist sich dieses lediglich als eine weitere Ebene der Indirektion, da diese gleich mächtig ist wie jede andere, konkrete Turing Maschine. Doch kann ein Paradoxon provoziert werden, wenn man annimmt, dass es eine Maschine geben kann, welche deterministisch vorhersagen kann, ob beliebige Maschinen halten können, was in etwa vergleichbar ist zum Ansatz bei dem Russel’schem Paradox².

Was zunächst wie die Eingrenzung eines willkürlichen Systems erscheint, erweist sich als allgemeine Einschränkung aller Modelle welche Berechenbarkeit oder verwandte Konzepte modellieren. Das erste Beispiel welches auf dieses Phänomen hindeutete, war der Beweis der gegenseitigen Äquivalenz zwischen Turing’s *a-Maschinen* und Alonzo Church’ *Lambda Kalkül*. Dieses ist ein alternatives Berechnungsmodell, welches, obwohl es nach Außen vollkommen anderes erscheint, zu den gleichen Schlüssen gelangt wie Turing, und gleich mächtig ist.

Es stellt sich auch heraus, dass dieses nicht begrenzt ist auf abstrakte, mathematische Modelle, sondern die gleichen Einschränkungen auch in der “echten Welt”, für beliebige Rechner gelten: Kein Rechner, ob Laptop, Serverfarm, weltweiter Mesh, Supercomputer oder Quantenrechner ist mächtiger als eine Turing Maschine.

Die Frage ist nun: Sagt diese Tatsache etwas aus über das Grundwesen der Mathematik, oder handelt es sich hierbei lediglich um eine analytische Eigenschaft des Berechnungsmodells?

***Indispensability* der Mathematik**

In der Philosophie der Mathematik, drehen sich viele Fragen um die Diskussion, ob die Mathematik eine eigenständige Existenz hat, oder ob es sich hierbei nur um ein “Modell” oder “Spiel” handelt, welches von Menschen erfunden wurde.

Eine Front dieser Auseinandersetzung versucht das Argument aufzustellen, dass die Mathematik eine notwendige, menschliche unabhängige Komponente der

¹Er selbst nannte das Konzept “a-Maschine”, für *Automatische Maschine*, das auf die Abarbeitung nach festen Regeln hin deutet.

²Auch hier sind die Details irrelevant, das Wichtige es nur das es Probleme gibt welche unentscheidbar sind

nicht-belebten Welt sei. Das Ziel hierbei ist es, zu beweisen, das es physikalische, chemische, etc. Prozesse gibt welche **ausschließlich** auf ein mathematisches Verständnis zurückberufen müssen. Beweist man dieses, beweist man die *Indispensability*, die Unverzichtbarkeit, der Mathematik.

Das Universum als Berechnung

Die Frage, hinsichtlich Berechenbarkeit, welche ich nun stellen will ist ob die Natur rechnet? Gibt es Prozesse, welche nur als Berechnungen angesehen werden können? Betrachtet man zum Beispiel die Physik (wobei der Fokus auf die klassische, deterministisch Physik liegen soll):

Es kann zwar nicht gesagt werden, dass wir eine direkte Antwort auf Fragen wie “Gibt es mehr als 20 Primzahlen kleiner als 100” oder “Gibt es einen Weg durch den Graphen G von Knoten a zu Knoten b ” (Entscheidungsproblem) aber anscheinend auch nicht “Finde den Kürzesten Weg im Graphen G vom Knoten a zu Knoten b zu Knoten a unter dem Längenmaß μ ” (Optimierungsproblem). Beide dieser Fragen sollten nach endlicher Zeit terminieren, mit einem Ergebnis, dass die Frage beantwortet (“Ja”, “Nein”, 13.2, etc.). Um dieses (beweis-technisch) zu erreichen, brauchte man einen Übersetzungsschritt, von dem Mathematischen, zum Physikalischen, und vice versa identifizieren. Nur dann könnte angefangen werden zu beweisen, ob eine Interpretation der Physik gleich mächtig ist wie alle bestehenden Berechenbarkeitsmodelle.

Man mag nun darauf hinweisen, dass nach Stand der prominentesten physikalischen Theorien über den Ursprung und die Entwicklung des Universums, dieses einen Anfang (Urknall) und Ende (*Big Crunch*, *Hitzetot*, ...) haben soll. Mag dieses auch sein, ist nicht klar was die Frage ist, welche durch Physikalische oder sonstige Naturprozesse “berechnet” werden soll.

Da jedoch aus unserer Sicht, und der uns zur Verfügung stehenden wissenschaftlichen Mittel und Beweise, keine Indizien darauf geben, ist die Spekulation in dieser Hinsicht wenig Produktiv. Des Weiteren, ist weder Anfang noch Ende des Universums garantiert, wenn man an zyklische Theorien denkt, wo Entstehung und Erlöschen von allem was existiert sich in Zyklen wiederholt.

Berechenbarkeit in natürlichen Systemen

Betrachtet man Anstatt einer Gesamtsicht, wobei das Universum als berechnender Prozess angesehen wird, ein Segment der natürlichen Welt: Eine Galaxis, ein Sonnensystem, das klimatische System eines Planeten mit Atmosphäre, das Ökosystem eines belebten Planeten oder nur einen Wald. Ja nachdem wie diese Prozesse aufgefasst werden, könnte man unterschiedliche Kommentare dazu abgeben.

Es wirkt aber umständlich und erzwungen, wenn man versucht ein Entscheidungsproblem zu erkennen (“Können sich in einem Sonnensystem mehr als 10 Planeten bilden”, “Schafft es ein Stern ein Weißer Riese zu werden”). Ein Optimierungsproblem hingegen scheint plausibler, wie beispielsweise “Finde den kürzesten Weg zwischen einer Wasser-Quelle und See”³.

Doch unterschieden sich diese beiden Problemstellungen wirklich? Denn ist der erste Schritt, wobei ein beliebiges Teilssegment betrachtet wird, und die

³Z.B.: Wasser wurde in den ersten primitiven Analog-Rechnern benutzt, um Differenzialgleichungen zu lösen: <http://www.digitaljournal.com/article/338106>

Analyse auf dieses eingeschränkt wird? Doch treffen wir, als Menschen, diese Entscheidung, nachdem was wir kennen und uns sinnvoll erscheint.

Es gibt kein physikalisches Konzept von Galaxien oder Wäldern, welches direkt aus physikalischer Grundkonzepte folgt (oder zumindest unserem Verständnis davon). Jedes dieser Systeme ist von seinen anderen Teilen, außerhalb des Systems demarkiert, nachdem was wir bereits als Menschen darüber verstehen. Demnach ist die Antwort wie auch die Berechnung selbst, wenn nicht impliziert dann stark von der Fragestellung beeinflusst.

Dieses könnte aber darauf hindeuteten, das diese komplexeren Systeme, nicht die Phänomene sind, welche nur durch Verständnis der Berechenbarkeitstheorie nachzuvollziehenden sind, sondern gleich-mächtige “Simulationen”, wie auch eine Turing Maschine eine andere Turing Maschine (oder beliebige andere Modelle der Berechenbarkeit) simulieren kann.

Subatomere Berechenbarkeit

Könne man also ein sichereres Fundament finden, wenn wir vom Gesamten, über den Teil, zum kleinsten und fundamentalsten gehen? Nach derzeitigem Stand der Wissenschaft wäre das die subatomare Ebene, der Quarks und Leptonen. Von diesen wird das Elektron und die damit zusammenhängenden elektromagnetischen Wechselwirkungen am bekanntesten sein. Könne also beispielsweise was wir als Stromfluss (“Finde den Weg des geringsten elektrischen Widerstands von Punkt A zu Punkt B .”) verstehen, aufgefasst werden als eine Art Berechnung, ohne Angst vor menschlichem “Perspektivismus” haben zu müssen?

Hierzu sollte man sich an eine grundlegende Eigenschaft von Berechnungsmodellen erinnern: Allgemeinheit. Es genügt nicht nur ein Problem, oder Variationen eines Problems lösen zu können. Stattdessen muss ein Modell für Berechenbarkeit in der Lage sein, alle Probleme lösen zu können, welche auch von allen anderen Modellen lösbar sind.

Ob beispielsweise Stromfluss ein Ausdruck von Rechnung ist⁴ oder alle fundamentalen Wechselwirkungen (Elektromagnetismus, schwache und starke Wechselwirkung, Schwerkraft) eine Rolle spielen, und die Interaktion dieser ebenfalls einen Rechenprozess modelliert, ist außerhalb des Rahmens dieser Arbeit.

Fundamental-Physik als Ausdruck von Berechnung

Eine andere Perspektive, eigenständige “Rechnungen” zu finden, wurde von den Theoretikern der *Digitalen Physik* untersucht. Unter diesen, ist Konrad Zuse ein prominenter Vertreter. In seinem Text “Rechnender Raum”[5], schlägt der Pionier der Informatik vor, dass ein vollkommenes diskretes Verständnis der Physik möglich sei.

Grundlage für diese Behauptung findet Zuse in der Quantenphysik, welches die *Quantisierung*⁵ von Raum, Zeit und Energie entdeckt hat. Spezifisch schlägt

⁴Da “gewöhnliche” Rechner ja auf Schaltkreisen basieren, und der richtigen Kombination von Leitern, Widerständen und Halbleitern, ist es nicht zu weit hergeholt

⁵Unter *Quantisierung* ist zu verstehen, dass Physikalische Größen nicht kontinuierlich sind (also auf \mathbb{R} definiert, wie in der klassischen Physik), sondern nur vielfache eines *Quantums* entsprechen können. So ist zum Beispiel die geringste Ladung, welche von einem Elektronen zugesprochen wird, die Elementarladung e , und alle Ladungen entsprechen einem ganzzahligen Vielfachen von e .

er ein Verständnis basierend auf der Automatentheorie, spezifisch dem Konzept der *Zellulären Automaten*.

Zelluläre Automaten

Die bereits vorhin erwähnte Turing Maschine ist eine Art “Automat”. Mit einer endlichen Anzahl von Zuständen werden Ein- und Ausgaben verarbeitet. Einfachere, alltägliche Automaten sind beispielsweise Straßenampeln. Diese wechseln zwischen verschiedenen Lichtkonfigurationen, mit festen Regeln (eine Ampel wechselt nie von Grün auf Gelb und dann zurück auf Grün).

Unter zellulären Automaten, versteht sich eine “Verknüpfung” mehrerer Automaten, zu einem komplexeren Gebilde. Diese “kommunizieren” zwischen einander, und produzieren somit komplexere Resultate. Diese würden als das “emergente Effekt” (lat. *emergere*, Herauskommen) der Automaten bezeichnet werden.

Ein populäres Beispiel für Zelluläre Automaten ist *Conway’s Game of Life*, welches trotz des einfachen Regelwerks für jede Zelle, in der Lage ist eine Turing Maschine zu simulieren[3], und somit Turing Vollständig ist.

Zuse behauptet, dass um das scheinbar kontinuierliche Wesen der klassischen Physik zu erklären, müssten diese “Digitalteilchen” bei weitem Kleiner sein als die derzeit angenommenen kleinsten Teilchen der Physik[6, S. 341].

Insgesamt leidet diese Theorie nicht unter der Willkür oder Gezwungenheit der bisher vorgeschlagenen Theorien, Berechenbarkeit zu finden, welche eigenständig von Menschen existiert. Als Grundsubstrat aller physikalischen Prozesse, kann es immer wieder dazu kommen, dass eben-so mächtige Modelle simuliert werden.

Anmerkung zur Beweisbarkeit

Insgesamt, bleibt diese und verwandte Theorien recht spekulativ. Noch existieren keine Theorien welche die *Digitale Physik* fundamental widerlegen. Eine Möglichkeit, wie dieses gemacht werden könne, möchte ich im Folgenden skizzieren.

Unter der Annahme, es gibt keine “Hyperberechenbarkeit”, also eine Kategorie oder Art der Rechnung welche stärker ist Turing Maschinen (oder beliebige andere Modelle), könnte dieser *Rechnender Raum* nicht in der Lage seien unberechenbare Probleme zu lösen.

Daraus folgt, dass falls ein Phänomen, beliebiger Art (Physikalisch, Chemisch, Ökologisch, ...) gefunden werden kann, welches das Halteproblem lösen könnte – oder ein Problem, welches auf das Halteproblem reduziert werden kann – würde dieses entweder auf die Existenz von Hyperberechenbarkeit hinweisen, oder die Theorie des Rechnenden Raumes widerlegen. Von diesen beiden ist letzteres die wahrscheinlichere Folge.

Zusammenfassung

Es wurden verschiedene Ansatzpunkte skizziert, wie Berechenbarkeit im *Indispensability Argument* benutzt werden kann. Für die verschiedenen Ansätze, wurden jeweils deren Stärken, Schwächen und interessanten Punkte aufgezählt.

Berechenbarkeit ist leicht zu finden, beziehungsweise *wiederzufinden*, aber es ist schwer zu zeigen, das diese unabdingbar ist. Für die meisten Fälle, wo Systeme

identifiziert werden könne, welche Berechenbarkeit modellieren (eg. Stromfluß, Wasserfluß, etc.) können ebenso gut alternative, uns besser geforschte Theorien präsentiert werden.

Die beste Chance, eigenständige Rechenprozesse zu finden, würde noch einige Forschungen im Gebiet der Fundamentalphysik benötigen. Aus diesem Grund eignet sich – für das erste – Berechenbarkeit nicht als Beweismittel der eigenständig existierenden Mathematik.

Literatur

- [1] Alonzo Church. “An Unsolvble Problem of Elementary Number Theory”. In: *American Journal of Mathematics* 58.2 (1936), S. 345–363. ISSN: 00029327, 10806377. URL: <http://www.jstor.org/stable/2371045>.
- [2] W. Ackermann D. Hilbert. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 27. Springer Berlin Heidelberg, 1972. ISBN: 978-3-662-11933-4,978-3-662-11932-7.
- [3] Paul Rendell. *Turing Machine implemented in Conway’s Game of Life*. 2015. URL: <http://rendell-attic.org/gol/tm.htm>.
- [4] A. M. Turing. “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-42.1 (Jan. 1937), S. 230–265. ISSN: 0024-6115. DOI: 10.1112/plms/s2-42.1.230. eprint: <https://academic.oup.com/plms/article-pdf/s2-42/1/230/4317544/s2-42-1-230.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>.
- [5] K. Zuse. *Rechnender Raum*. Schriften zur Datenverarbeitung. Vieweg+Teubner Verlag, 1969. URL: <https://books.google.de/books?id=AFggAQAIAAJ>.
- [6] Konrad Zuse. “Rechnender Raum”. In: Bd. 8. Elektronische Datenverarbeitung, 1967, S. 336–344. URL: <ftp://ftp.idsia.ch/pub/juergen/zuse67scan.pdf>.