Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

# Zusatzübungen zur Vorlesung Algorithmik kontinuierlicher Systeme

## Zusatzblatt 2 — Matrixzerlegungen

### Aufgabe 1 — LR-Zerlegung (I)

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2 — LR-Zerlegung (II)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe einer

a) LR-Zerlegung.

b) PLR-Zerlegung.

### Aufgabe 3 — LR-Zerlegung (III)

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der folgenden Matrix $A_1$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 4 — Python: Wachstumsfaktor und LR-Zerlegungen

Wir definieren den **Wachstumsfaktor** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n \times n)$ wie folgt:

**Definition 1.** *Sei $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n \times n)$ und beschreibe $A^{(k)} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n \times n)$ die Ausprägung der Matrix $A$ nach dem $k$-ten Gaußschritt (In unserem Algorithmus also die Matrix $R$ im $k$-ten Iterationsschritt). Dann definieren wir den Wachstumsfaktor $\rho$ als*

$$\rho = \frac{\max_{i,j,k} \left| a_{i,j}^{(k)} \right|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|}.$$

Schreiben Sie eine Funktion `LUdec(A)`, welche ein Tupel LU, rho zurück gibt, wobei ...

- `LU` die Matrizen $L$ und $R$ der LR-Zerlegung enthält. *Hinweis: Dabei sollen sowohl $L$ als auch $R$ in **einer** Matrix gespeichert werden.*
- `rho` den Wachstumsfaktor der Matrix $A$ beschreibt.

Sie können davon ausgehen, dass der Funktion nur quadratische $n \times n$ NumPy-Matrizen übergeben werden.

## Aufgabe 5 — QR-Zerlegung: Format

Gegeben ist eine pentadiagonale $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$, das heißt $a_{ij} = 0$ falls $|i - j| > 2$.
Für ebendiese Matrix soll mit Hilfe von GIVENSrotationen die QR-Zerlegung bestimmt werden. Wieviele solcher GIVENSrotationen werden dazu benötigt?

$$C = \begin{pmatrix}
* & * & * & 0 & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 \\
* & * & * & * & 0 & & & & & \\
* & * & * & * & * & \ddots & & & & \vdots \\
0 & * & * & * & * & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & * & * & * & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & * & * & * & 0 \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & * & * & * & * \\
 & & & & & 0 & * & * & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & & & 0 & 0 & * & * & *
\end{pmatrix}$$

Struktur einer pentadiagonalen Matrix

## Aufgabe 6 — Permutationsmatrizen

Geben Sie eine $4 \times 4$-Permutationsmatrix $P_1$ mit $P_1^4 \neq E_4$, sowie eine weitere $4 \times 4$-Permutationsmatrix $P_2$ mit $P_2^4 = E_4$, aber $P_2^2 \neq E_4$ an. Begründen Sie Ihre Behauptungen durch Nachrechnen der erforderlichen Eigenschaften.

## Aufgabe 7 — Matrizen (I)

Geben Sie $((AB)^{-1})^T$ nur in Abhängigkeit von $(A^{-1})^T$ und $(B^{-1})^T$ an.

## Aufgabe 8 — Besondere Matrizen

Vervollständigen Sie den folgenden Satz und begründen Sie Ihre Wahl: Sei $L$ eine linke untere Dreiecksmatrix, so ist $(L^{-1})^T$ eine ...... Matrix.

## Aufgabe 9 — Matrizen (II)

Sei $R \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}, m \times n)$ und $A = A^T$ eine symmetrische $m \times m$ Matrix.

a) Verwenden Sie $R^T$, $A$ und $R$ um eine symmetrische Matrix zu erstellen. Rechnen Sie die definierende Eigenschaft der Matrix nach und geben Sie die Dimension Ihrer Matrix an.

b) Zeigen Sie: $B = R^T R$ hat keine negativen Zahlen auf der Diagonalen.

## Aufgabe 10 — Python: Householder-Spiegelungen

Schreiben Sie eine Funktion `QRdec(A)`, welche eine QR-Zerlegung der quadratischen Matrix $A$ mittels Householder-Spiegelungen erstellt, und die Matrizen $Q$ und $R$ der Zerlegung zurückgibt.

## Aufgabe 11 — QR-Zerlegung (I)

Von der Matrix $A_2$ ist die QR-Zerlegung bekannt, es gilt

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\,Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\,R}$$

a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (unter Verwendung der QR-Zerlegung)

$$Ax = b \quad \text{für} \quad b = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T.$$

b) Bestimmen Sie einen Vektor $w$, so dass die zugehörige Householderspiegelung $H_w$ bei Anwendung auf $A$ (von Teilaufgabe a)) Nullen in der ersten Spalte erzeugt, das heißt

$$H_w A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie den Betrag der Determinante von $A$, also $|\det\ A|$

**Aufgabe 12 — QR-Zerlegung (II)**

Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A_3$ mit

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 13 — QR-Zerlegung (III)**

a) Bestimmen Sie die Householdertransformation $S$, die den Vektor $a = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$ auf ein Vielfaches des zweiten Einheitsvektors $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ spiegelt.

b) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3/4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

mit einer Householdertransformation.

c) Sei dann die partielle Zerlegung $Z$ der Matrix $A = Q_1 Z$ mittels einer Givensrotation $Q_1$ durch

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 0 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

bekannt. Beenden Sie die begonnene QR-Zerlegung mit Hilfe von Givensrotationen.

**Aufgabe 14 — Lösen eines linearen Gleichungssystems**

Gegeben sei die Matrix $A_5$ sowie deren LR-Zerlegung und ein Vektor $b$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A_5 x = b$ unter Zuhilfenahme der LR-Zerlegung.

**Aufgabe 15 — LR-Zerlegung (IV)**

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung folgender Matrix mit Pivotsuche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 16 — Verschiedenes**

a) Welche der folgenden Verfahren können zum Lösen von linearen Gleichungssystemen verwendet werden?

| ja | nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Gauß-Seidel-Verfahren |
| ☐ | ☐ | Quicksort |
| ☐ | ☐ | cg-Verfahren |
| ☐ | ☐ | QR-Zerlegung |
| ☐ | ☐ | Romberg-Verfahren |

b) Welche der folgenden Methoden ist zum Invertieren von Matrizen sinnvoll?

| ja | nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | LR-Zerlegung |
| ☐ | ☐ | Newton-Cotes-Regel |
| ☐ | ☐ | SVD |
| ☐ | ☐ | Dijkstra-Algorithmus |
| ☐ | ☐ | Ich versuche das Invertieren von Matrizen wenn möglich zu vermeiden. |