AlgoKs Notizen – Orga + Matrixzerlegungen

Organisatorisches

Übungsleiter: Florian Frank

@: florian.ff.frank@fau.de oder über StudOn

www: wwwcip.cs.fau.de/~yq53ykyr → AlgoKS

Termin:

Donnerstags, $10^{15} - 11^{45}$ Uhr

Was ist diese Tafelübung?

Hier geht es um die „Theorieübungen" a.k.a. Verfahren auf Papier

Wo finde ich die Präsenzaufgaben?

StudOn ⇝ AlgoKS-Kurs unter Übungen

Matrixzerlegungen

Aufgabe 1) (a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_{21} = \frac{R_{21}}{R_{11}} = -3 \qquad R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{21} \cdot R_{1,1:4} = (-3,-8,3,0)^T + 3 \cdot (1,2,0,0)^T$$
$$= (0,-2,3,0)^T$$

$$L_{31} = \frac{R_{31}}{R_{11}} = 0 \qquad R_{3,1:4} = R_{3,1:4}.$$

$$L_{32} = \frac{R_{32}}{R_{22}} = 4 \qquad R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{32} \cdot R_{2,2:4} = (-8,13,3)^T - 4 \cdot (-2,3,0)^T$$
$$= (0,1,3)^T$$

$$L_{43} = \frac{R_{43}}{R_{33}} = -2 \qquad R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{43} \cdot R_{3,3:4} = (0,2)^T$$

Algorithmus:

$k = 3$
$j = 4$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$

$R \leftarrow B$

für k von 1 bis 3 mache

 für j von $k+1$ bis 4 mache

  $L_{jk} \leftarrow R_{jk} / R_{kk}$

  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{jk} R_{k,k:4}$

Wie schreibe ich soetwas in der Klausur auf?

Denn dort funkt. die Wischtechnik nicht!

→ Schreibe die **NOTWENDIGEN** Zwischenschritte mit auf.

Das hieße hier bspw. die verschiedenen R-/L-Matrizen nach einem Schleifendurchlauf in Tabellenform. Dann <u>MUSS</u> dabei aber das Endergebnis nochmal extra stehen!

Tabellarische Struktur für das Ergebnis von (a):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

L	R
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

L	R
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Die LR-Zerlegung für die Matrix B ist gegeben durch

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:R} .$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=: R}$$

WAS FÄLLT BEI DIESER ZERLEGUNG AUF?

- B's rechte Nebendiagonale ist identisch mit der rechten Nebendiagonale von R.
- B ist tridiagonal und L, R sind sehr dünnbesetzt. ← ~ mehr Nullen als sonstige Werte

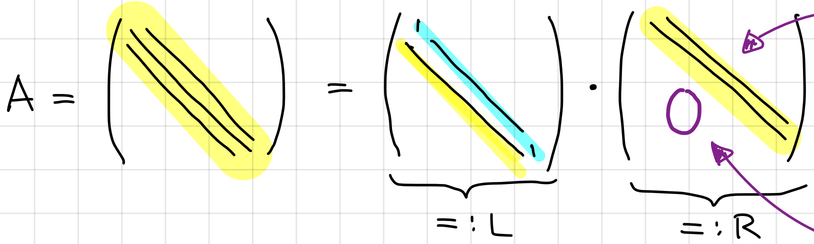
FRAGE: Lässt sich das verallgemeinern?

(b) + (c): Eine Verallgemeinerung sähe wie folgt aus:

Satz (LR-Zerlegung einer tridiagonalen Matrix)

$(b_i)_1^n$ auf Diag., $(a_i)_1^{n-1}$, $(c_i)_1^{n-1}$ auf den Nebendiag.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $m \in \mathbb{N}^+$ eine tridiagonale Matrix gegeben, so hat eine LR-Zerlegung, sofern diese existiert, die folgende Struktur:



Freiraum in solchen Darstellungen steht für Nullen.
Manchmal findet man auch einfach eine gr. 0.

Des Weiteren sind L und R durch die folgenden Matrizen explizit gegeben:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & r_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & r_n \end{pmatrix},$$

mit $l_i = a_i \cdot \frac{\delta_{i-1}}{\delta_i}$, $r_i = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ und $\delta_i := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = 0 \\ b_1 & \text{wenn } i = 1 \\ b_i \delta_{i-1} - a_{i-1} c_{i-1} \delta_{i-2} & \text{wenn } i \geq 2 \end{cases}$

Beweis: Nachrechnen!

Notiz: Hier aus Zeitgründen nicht ausführlicher ⇒ Anhang der Folien!

Man stellt fest:

$$l_k = \frac{a_k}{r_k} \qquad r_k = \begin{cases} b_1 & \text{für } k = 1 \\ b_k - c_{k-1} l_{k-1} & \text{für } k \geq 2 \end{cases}$$

(d) Wir gehen nun davon aus, dass die Matrix A tridiagonal ist und eine LR-Zerlegung besitzt. Das heißt, wir finden L, R wie oben mit

$$A = LR$$

und wollen $Ax = LRx = b$ lösen.

Dafür gehen wir drei Schritte:

1. LR-Zerlegung $A = L \cdot R$
2. Vorwärtssubstitution $L \cdot y = b$
3. Rückwärtssubstitution $R \cdot x = y$

Aufwand für Teilprobleme:

1 LR-Zerlegung

$r_1 \leftarrow b_1$

für k von 2 bis m tue

- $l_{k-1} \leftarrow a_{k-1}/r_{k-1}$
- $r_k \leftarrow b_k - c_{k-1} \cdot l_{k-1}$

Aufwand:

$m-1$ Divisionen

$m-1$ Subtraktionen

$m-1$ Multiplikationen

2 $Ly = b$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$y_1 \leftarrow b_1$

für k von 2 bis m tue

- $y_k \leftarrow b_k - l_{k-1} \cdot y_{k-1}$

Aufwand:

0 Divisionen

$m-1$ Subtraktionen

$m-1$ Multiplikationen

3 $Rx = y$

$x_m \leftarrow y_m / r_m$

für k von $m-1$ runter bis 1 tue

- $x_k \leftarrow (y_k - c_k \cdot x_{k-1}) / r_k$

Aufwand:

m Divisionen

$m-1$ Subtraktionen

$m-1$ Multiplikationen

GESAMTAUFWAND:

$$
\begin{aligned}
&2m-1 \text{ Divisionen}\\
&3m-3 \text{ Subtraktionen}\\
&3m-3 \text{ Multiplikationen}\\
\hline
&\Sigma: \ 8m-7 \text{ Operationen} \ll m^2 \text{ Operationen}
\end{aligned}
$$

Was haben wir heute festgestellt?

→ Allgemeine Algorithmen sind gut, spezielle aber oftmals besser.

FAZIT: „Überlege mit was für Daten man arbeitet und passe Algorithmen entsprechend an."

→ Lineare Algebra kann auch Spaß machen ☺