Übung zur Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Übung 2 – Matrixzerlegungen

Sommersemester 2021

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Was machen wir heute?

Wo stehen wir?

Rekapitulation — Matrixzerlegungen (I)

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

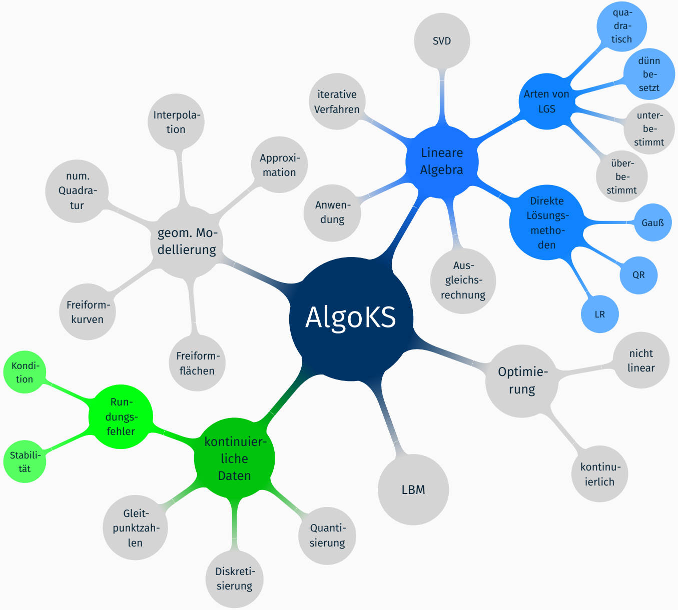
Rekapitulation — Matrixzerlegungen (II)

Rekapitulation — Matrixzerlegungen (III)

Hausaufgabe — LR- und QR-Zerlegung

Wo stehen wir?

Wo stehen wir?



Rekapitulation — Matrixzerlegungen (I)

Motivation

Ziel: Lösen eines linearen Gleichungssystems (LGS), wie zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 4 & -3 \\ 8 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 44 \\ 28 \\ -9 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Der Einfachheit sei angenommen, dass die hier betrachteten Matrizen allesamt *nicht-singulär* sind.

Lösen eines LGS — Idee 1: Berechnen der Inversen

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass *nicht-singuläre Matrizen* eine Inverse besitzen. Nun ist das LGS

$$A \cdot x = b$$

mit

$$x = A^{-1}b$$

eindeutig lösbar.

…en eines LGS — Idee 1: Berechnen der Inversen

Aus… line… …e M… …n

eine I…

mi…

eind… …g lösba…

Dies ist eine sehr **naive** und
nicht besonders schlaue Idee!
Das Berechnen von Inversen
ist nur schlecht umsetzbar!

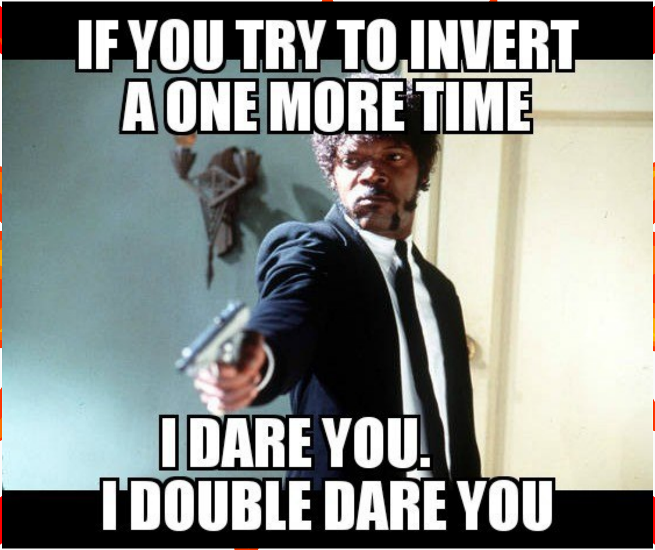
…en eines LGS — Idee 1: Berechnen der Inversen

Aus…
eine I…

…n

mi…

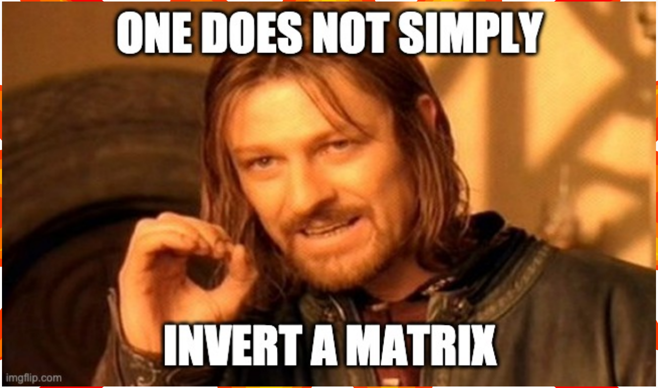
eind…



…en eines LGS — Idee 1: Berechnen der Inversen

Aus… …n

eine I…



mi…

eind…

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Effizienz

Es braucht ungefähr $2 \cdot n^3$ Schritte bis eine Inverse berechnet wurde. Eine Faktorisierung braucht hier weniger Schritte.

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Effizienz

Es braucht ungefähr $2 \cdot n^3$ Schritte bis eine Inverse berechnet wurde. Eine Faktorisierung braucht hier weniger Schritte.

Ebenso ist die inverse Matrix bei *dünnbesetzten Matrizen* im Allgemeinen **nicht dünnbesetzt**. Es kommt also bei großem n ($n \gtrsim 10^6$) nicht nur zu Zeitproblemen, sondern auch zu Speicherproblemen.

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Mangelnde Fehlertoleranz

Sei $\varepsilon > 0$ klein, so ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 + \varepsilon & 100 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Angenommen ε sei 0.05, so gilt für A und A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Mangelnde Fehlertoleranz

Sei $\varepsilon > 0$ klein, so ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 + \varepsilon & 100 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Angenommen ε sei 0.05, so gilt für A und A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

Haben wir uns allerdings bei ε vermessen und ε läge bei 0.1 stattdessen, so gölte für A und A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Mangelnde Fehlertoleranz

$$\varepsilon = {}^1\!/_{20}: \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = {}^1\!/_{10}: \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so spränge x von $\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Mangelnde Fehlertoleranz

$$\varepsilon = {}^{1}/_{20}: \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = {}^{1}/_{10}: \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so spränge x von $\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Bei Faktorisierungen ist dieser Fehler im Allgemeinen nicht so groß!

Lösen eines LGS — Inverse sind numerisch schlecht

Mangelnde Fehlertoleranz

$$\varepsilon = {}^1\!/_{20}: \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = {}^1\!/_{10}: \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so spränge x von $\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Bei Faktorisierungen ist dieser Fehler im Allgemeinen nicht so groß!

Schlussfolgerung

Obwohl Matrizen nahe beieinanderliegen, muss dies nicht für ihre Inversen gelten!

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (I)

Hierbei betrachten wir die erweiterte Systemmatrix des Problems $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$$

und formen sie durch Elementaroperationen zu einem äquivalenten Problem

$$Rx = \widetilde{b}$$

um, wobei R eine *obere Dreiecksmatrix* ist.

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (I)

Hierbei betrachten wir die erweiterte Systemmatrix des Problems $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$$

und formen sie durch Elementaroperationen zu einem äquivalenten Problem

$$Rx = \widetilde{b}$$

um, wobei R eine *obere Dreiecksmatrix* ist.

> Wir wandeln dadurch unser *schwierigeres* Problem in ein *einfach zu lösendes* Problem um.

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (I)

Hierbei betrachten wir die erweiterte Systemmatrix des Problems $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$$

und formen sie durch Elementaroperationen zu einem äquivalenten Problem

$$Rx = \widetilde{b}$$

um, wobei R eine *obere Dreiecksmatrix* ist.

Wir wandeln dadurch unser *schwierigeres* Problem in ein *einfach zu lösendes* Problem um.

Generell ist dies die Überlegung, die später zu Faktorisierungen führt. Es sollten die Probleme $M_1x_1 = b$ bis $M_nx_n = x_{n-1}$, wobei $A = M_1 \cdots M_n$ gilt, *einfach* zu lösen sein.

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (II)

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (II)

Wir kennen drei Elementaroperationen: **Zeilenvertauschungen**, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Elementaroperationen (*Zeilenvertauschungen*)

Jede (*Zeilen*-)Elementaroperation lässt sich als **Links**multiplikation einer Elementarmatrix ($T_{\ell,k}$) mit A und b darstellen.

$T_{\ell,k}$ vertauscht die ℓ-te mit der k-ten Zeile.

$$T_{\ell,k} = \left(t_{\ell,k}\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i=j \wedge i \neq \ell \wedge k \neq j \\ 1 & \text{, falls } i=\ell \wedge j=k \\ 1 & \text{, falls } i=k \wedge j=\ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (II)

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, **Zeilenmultiplikationen** und Gauß-Scherungen.

Elementaroperationen (*Multiplikation mit einem Skalar*)

Jede (*Zeilen-*)Elementaroperation lässt sich als **Links**multiplikation einer Elementarmatrix ($D_\ell(\alpha)$) mit A und b darstellen.

$D_\ell(\alpha)$ multipliziert die ℓ-te Zeile mit α.

$$D_\ell(\alpha) = (d_\ell)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j \wedge i \neq \ell \neq j \\ \alpha & \text{, falls } i = \ell = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (II)

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und **Gauß-Scherungen**.

Elementaroperationen (*Zeilenaddition*) — *Gauß-Scherungen*

Jede (*Zeilen-*)Elementaroperation lässt sich als **Links**multiplikation einer Elementarmatrix $(N_{\ell,k}(\alpha))$ mit A und b darstellen.

$N_{\ell,k}(\alpha)$ addiert das α-fache der ℓ-ten Zeile auf die k-te Zeile.

$$N_{\ell,k}(\alpha) = \left(n_{\ell,k}\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i=j \\ \alpha & \text{, falls } i=\ell \wedge j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (II)

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Idee

Statt für jedes b die Eliminationen nochmal durchzuführen ($\approx n^3$ Schritte) merken wir uns die Eliminationsmatrizen in einer Matrix M.

Lösen eines LGS — Idee 2: Gauß (II)

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Idee

Statt für jedes b die Eliminationen nochmal durchzuführen ($\approx n^3$ Schritte) merken wir uns die Eliminationsmatrizen in einer Matrix M.

Aus Mathe ist ebenso bekannt, dass es zum Lösen von LGS (nahezu) nur Operationen der Zeilenaddition braucht. Beschränken wir uns auf diese Operationen, so erhalten wir eine besondere Form der Matrix M.

Lösen eines LGS — Gauß $\rightsquigarrow$ LR-Faktorisierung (I)

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit Gauß, kann man sich die „Faktoren α“ der Gauß-Scherungen in einer *linken unteren Dreiecksmatrix L* merken.

Lösen eines LGS — Gauß $\rightsquigarrow$ LR-Faktorisierung (I)

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit Gauß, kann man sich die „Faktoren α“ der Gauß-Scherungen in einer *linken unteren Dreiecksmatrix L* merken.

Lemma 2.1 (Inverse der Gauß-Scherung)

Für $N_{i,j}(\alpha)$ gilt:

$$N_{i,j}^{-1}(\alpha) = N_{i,j}(-\alpha)$$

Lösen eines LGS — Gauß $\rightsquigarrow$ LR-Faktorisierung (I)

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit Gauß, kann man sich die „Faktoren α" der Gauß-Scherungen in einer *linken unteren Dreiecksmatrix* L merken.

Lemma 2.1 (Inverse der Gauß-Scherung)

Für $N_{i,j}(\alpha)$ gilt:

$$N_{i,j}^{-1}(\alpha) = N_{i,j}(-\alpha)$$

Lemma 2.2 (LR-Faktorisierung)

Viele Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann durch maximal $s = \sum_{i=0}^{n-1} i$ Gauß-Scherungen $N_{l_j,k_j}(\alpha_j)$ in die Form

$$A = L \cdot R = \underbrace{N_{l_1,k_1}(-\alpha_1)\cdots N_{l_s,k_s}(-\alpha_s)}_{=:\, L} \cdot \underbrace{N_{l_s,k_s}(\alpha_s)\cdots N_{l_1,k_1}(\alpha_1)\cdot A}_{=:\, R},$$

wobei L eine *linke untere* und R eine *rechte obere Dreiecksmatrix* ist, gebracht werden.

Lösen eines LGS — Gauß $\rightsquigarrow$ LR-Faktorisierung (II)

Algorithmus 2.1 — LR-Faktorisierung *ohne* Pivotisierung

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ausgabe : L, R, so dass $LR = A$

```
L ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to n − 1 do
    for j ← k + 1 to n do
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}   /* Aufpassen, R_{j,k:n} ist ein Vektor */
    end for
end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

Berechne die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4-7) | ...
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4-7) …
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7)   **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
        $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
        $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
    end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{2,1} \cdot R_{1,1:4}$$

```
(1) L ← 𝟙_4
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 3 do                              // k = 1
(4)     for j ← k + 1 to 4 do                      // j = 2
(5)         L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
(6)         R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
(7)     end for
(8) end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} = (20, 17, 15, 11)^T - 5 \cdot (4, 3, 2, 1)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow {}^{R_{j,k}}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} = (0, 2, 5, 6)^T$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 2
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 3
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} = R_{3,1:4} - L_{3,1} \cdot R_{1,1:4}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← A
for k ← 1 to 3 do                          // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} = (16, 18, 26, 24)^T - 4 \cdot (4, 3, 2, 1)^T$$

```
L ← 𝟙_4
R ← A
for k ← 1 to 3 do                                  // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                          // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} = (0, 6, 18, 20)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 3
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7)   **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← A
for k ← 1 to 3 do                                  // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                          // j = 4
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} = R_{4,1:4} - L_{4,1} \cdot R_{1,1:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} = (4, 7, 18, 18)^T - 1 \cdot (4, 3, 2, 1)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow {}^{R_{j,k}}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} = (0, 4, 16, 17)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← A
for k ← 1 to 3 do                                  // k = 2
    for j ← k + 1 to 4 do                          // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{3,2} \cdot R_{2,2:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} = (6, 18, 20)^T - 3 \cdot (2, 5, 6)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} = (0, 3, 2)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 3
(5) $L_{j,k} \leftarrow {}^{R_{j,k}}/_{R_{k,k}}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 4
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} = R_{4,2:4} - L_{4,2} \cdot R_{2,2:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} = (4, 16, 17)^T - 2 \cdot (2, 5, 6)^T$$

```
(1) L ← 𝟙_4
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 3 do                          // k = 2
(4)     for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 4
(5)         L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
(6)         R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
(7)     end for
(8) end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} = (0, 6, 5)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7)   **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 3
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 3
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 4
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

```
L ← 𝟙_4
R ← A
for k ← 1 to 3 do                          // k = 3
    for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 4
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{4,3} \cdot R_{3,3:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} = (6,5)^T - 2 \cdot (3,2)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} = (0, 1)^T$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 3
(4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
        $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
        $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
    end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung für die nachfolgende tridiagonale Matrix (ohne Pivotsuche)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4-7) …
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4-7) …
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                                   // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                              // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                      // j = 2
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7)   **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} =$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                        // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                // j = 2
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{2,1} \cdot R_{1,1:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} = (-3, -8, 3, 0)^T + 3 \cdot (1, 2, 0, 0)^T$$

```
(1) L ← 𝟙_4
(2) R ← B
(3) for k ← 1 to 3 do                          // k = 1
(4)     for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 2
(5)         L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
(6)         R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
(7)     end for
(8) end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} = (0, -2, 3, 0)^T$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                        // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                // j = 2
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ \color{purple}{0} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                        // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do                // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

$$R_{3,1:4} = R_{3,1:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
        $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
        $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
    end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$

$R \leftarrow B$

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$

  end for

end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$

$R \leftarrow B$

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 4

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$

    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$

  end for

end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                          // k = 2
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                         // k = 2
    for j ← k + 1 to 4 do                 // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} =$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 3
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{3,2} \cdot R_{2,2:4}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} = (-8, 13, 3)^T - 4 \cdot (-2, 3, 0)^T$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                              // k = 2
    for j ← k + 1 to 4 do                      // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} = (0, 1, 3)^T$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                          // k = 2
    for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 4
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 4
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} =$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                       // k = 3
  | for j ← k + 1 to 4 do               // j = 4
  |   | L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
  |   | R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
  | end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{4,3} \cdot R_{3,3:4}$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$

$R \leftarrow B$

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$

  end for

end for

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} = (-2, -4)^T + 2 \cdot (1, 3)^T$$

$L \leftarrow \mathbb{1}_4$
$R \leftarrow B$
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
  for $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
  end for
end for

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} = (0,2)^T$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                         // k = 3
    for j ← k + 1 to 4 do                 // j = 4
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
L ← 𝟙_4
R ← B
for k ← 1 to 3 do                                  // k = 3
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:4} ← R_{j,k:4} − L_{j,k} · R_{k,k:4}
    end for
end for
```

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $R \leftarrow B$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
(7) **end for**
(8) **end for**

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung für die nachfolgende tridiagonale Matrix (ohne Pivotsuche)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{R}$$

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

b) Gegeben sei nun eine allgemeine tridiagonale $n \times n$-Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Welche Struktur haben L und R?

c) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A.

Aufgabe 1 — LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

b) Gegeben sei nun eine allgemeine tridiagonale $n \times n$-Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Welche Struktur haben L und R?

c) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A.

d) Wie groß ist jeweils der Aufwand zum Lösen der beiden Teilprobleme $Ly = b$ und $Rx = y$?

Rekapitulation — Matrixzerlegungen (II)

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (I)

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1

Wir faktorisieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem eben gelernten Algorithmus.

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (I)

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1

Wir faktorisieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem eben gelernten Algorithmus. Nach dem zweiten Eliminationsschritt erhalten wir ein L und R von

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & ? & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (I)

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1

Wir faktorisieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem eben gelernten Algorithmus. Nach dem zweiten Eliminationsschritt erhalten wir ein L und R von

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & ? & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es müsste im nächsten Schritt durch 0 dividiert werden!

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (II)

Beispiel 2.2

Wir betrachten nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

für kleines ε. Offensichtlich erhalten wir für $\varepsilon = 0$ Beispiel 2.1

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (II)

Beispiel 2.2

Wir betrachten nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+\varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

für kleines ε. Es ergibt sich eine LR-Zerlegung von

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & {}^2/_\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - {}^6/_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (II)

Beispiel 2.2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - 6/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung.

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (II)

Beispiel 2.2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & {}^{2}/_{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - {}^{6}/_{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit[1], so gilt $4 - {}^{6}/_{\varepsilon} \approx -{}^{6}/_{\varepsilon}$.

[1] sehr klein, aber darstellbar

Beispiel 2.2

$$\widetilde{L} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & {}^2/_\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & -{}^6/_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit, so gilt $4 - {}^6/_\varepsilon \approx -{}^6/_\varepsilon$. Lösen wir nun $Ax = b$ mit der ungenauen LR-Zerlegung, sowie mit der exakten Zerlegung, so erhalten wir

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} {}^{11}/_2 - {}^2/_{3\varepsilon} \\ -2 \\ {}^2/_{3\varepsilon} - {}^2/_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} {}^{11}/_2 \\ -2 \\ -{}^2/_3 \end{pmatrix} \qquad \neq \qquad x = \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon-7}{2\varepsilon-3} \\ \frac{2}{2\varepsilon-3} \\ \frac{-2\varepsilon+2}{2\varepsilon-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} {}^7/_3 \\ -{}^2/_3 \\ -{}^2/_3 \end{pmatrix}.$$

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (II)

Beispiel 2.2

$$\widetilde{L} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & {}^2/_\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & -{}^6/_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = \begin{pmatrix} 1\,, 0\,, 0 \end{pmatrix}^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit, so gilt $4 - {}^6/_\varepsilon \approx -{}^6/_\varepsilon$. Lösen wir nun $Ax = b$ mit der ungenauen LR-Zerlegung, sowie mit der exakten Zerlegung, so erhalten wir

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} {}^{11}/_2 - {}^2/_{3\varepsilon} \\ -2 \\ {}^2/_{3\varepsilon} - {}^2/_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} {}^{11}/_2 \\ -2 \\ -{}^2/_3 \end{pmatrix} \qquad \neq \qquad x = \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon-7}{2\varepsilon-3} \\ \frac{2}{2\varepsilon-3} \\ \frac{-2\varepsilon+2}{2\varepsilon-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} {}^7/_3 \\ -{}^2/_3 \\ -{}^2/_3 \end{pmatrix}.$$

Obwohl $\widetilde{L}$ und $\widetilde{R}$ relativ nahe bei L und R liegen ist $\widetilde{L}\widetilde{R}$ weit von LR entfernt , die berechnete Lösung $\widetilde{x}$ wertlos.

Beispiel 2.2

$$\widetilde{L} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & {}^{2}/_{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & -{}^{6}/_{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = \begin{pmatrix} 1 , 0 , 0 \end{pmatrix}^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit, so gilt $4 - {}^{6}/_{\varepsilon} \approx -{}^{6}/_{\varepsilon}$. Lösen wir nun $Ax = b$ mit der ungenauen LR-Zerlegung, sowie mit der exakten Zerlegung, so erhalten wir

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} {}^{11}/_{2} - {}^{2}/_{3\varepsilon} \\ -2 \\ {}^{2}/_{3\varepsilon} - {}^{2}/_{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} {}^{11}/_{2} \\ -2 \\ -{}^{2}/_{3} \end{pmatrix} \qquad \neq \qquad x = \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon-7}{2\varepsilon-3} \\ \frac{2}{2\varepsilon-3} \\ \frac{-2\varepsilon+2}{2\varepsilon-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} {}^{7}/_{3} \\ -{}^{2}/_{3} \\ -{}^{2}/_{3} \end{pmatrix}.$$

Obwohl $\widetilde{L}$ und $\widetilde{R}$ relativ nahe bei L und R liegen ist $\widetilde{L}\widetilde{R}$ weit von LR entfernt , die berechnete Lösung $\widetilde{x}$ wertlos. Der Algorithmus ist numerisch instabil.

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (III)

Wann treten diese Probleme auf?

Wann immer $R_{kk} \ll R_{jk}$ gilt, und somit L_{jk} groß ist.

Lösen eines LGS — LR-Faktorisierung: Probleme (III)

Wann treten diese Probleme auf?

Wann immer $R_{kk} \ll R_{jk}$ gilt, und somit L_{jk} groß ist.

Lösungsvorschlag

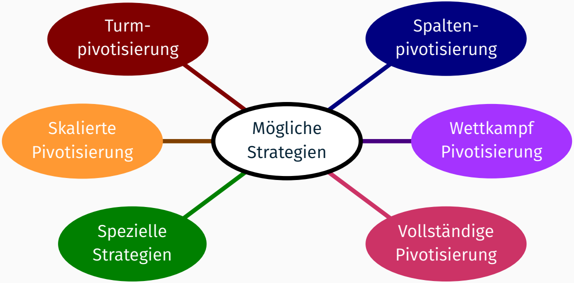
Verhindere das Problem durch geeignet gewählte Permutationen!

Wann treten diese Probleme auf?

Wann immer $R_{kk} \ll R_{jk}$ gilt, und somit L_{jk} groß ist.

Lösungsvorschlag

Verhindere das Problem durch geeignet gewählte Permutationen!



LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (I)

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (I)

Strategie — *Spaltenpivotisierung*

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (I)

Strategie — *Spaltenpivotisierung*

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix A

Faktorisiere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun in die Matrizen L, R und P, so dass

$$A = PLR$$

und für L, R, P gilt, dass ...

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (I)

Strategie — *Spaltenpivotisierung*

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix *A*

Faktorisiere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun in die Matrizen L, R und P, so dass

$$A = PLR$$

und für L, R, P gilt, dass ...
... $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *untere, linke* Dreiecksmatrix ist.

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (I)

Strategie — *Spaltenpivotisierung*

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix *A*

Faktorisiere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nun in die Matrizen L, R und P, so dass

$$A = PLR$$

und für L, R, P gilt, dass ...

... $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *untere, linke* Dreiecksmatrix ist.

... $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *obere, rechte* Dreiecksmatrix ist.

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (I)

Strategie — *Spaltenpivotisierung*

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix *A*

Faktorisiere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nun in die Matrizen L, R und P, so dass

$$A = PLR$$

und für L, R, P gilt, dass ...

... $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *untere, linke* Dreiecksmatrix ist.
... $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *obere, rechte* Dreiecksmatrix ist.
... $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Kombination aus *Permutationsmatrizen* ist.

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (II)

Satz 2.3 (Existenz der PLR-Zerlegung)

Für jede **quadratische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren Matrizen P, L, R wie vorhin, so dass

$$A = PLR$$

gilt. In anderen Worten: Eine jede quadratische Matrix besitzt eine *PLR*-Zerlegung.

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (II)

Satz 2.3 (Existenz der PLR-Zerlegung)

Für jede **quadratische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren Matrizen P, L, R wie vorhin, so dass

$$A = PLR$$

gilt. In anderen Worten: Eine jede quadratische Matrix besitzt eine *PLR*-Zerlegung.

Problem?

Was passiert wenn eine ganze Spalte nur aus Nullen besteht? Warum stellt dies kein Problem für den Algorithmus dar?

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (III)

Algorithmus 2.2 — LR-Faktorisierung *mit* Spaltenpivotisierung

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ausgabe : P, L, R, so dass $PLR = A$

$P \leftarrow \mathbb{1}_n$

$L \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// Wähle Pivotelement (PE)`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$ `// Wende Permutationsmatrix auf P an`

  $R_{k,k:n} \longleftrightarrow R_{i,k:n}$ `// Tausche PE auf Diagonale`

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$ `// Tausche korrespondierende L-Zeilen`

  for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**

    $L_{j,k} \leftarrow {}^{R_{j,k}}/_{R_{k,k}}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

Berechne die *PLR*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $P \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(3) $R \leftarrow A$
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(5-12) ...
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $P \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(3) $R \leftarrow A$
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(5-12) ...
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $P \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(3) $R \leftarrow A$
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(5-12) ...
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1) $P \leftarrow \mathbb{1}_4$
(2) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
(3) $R \leftarrow A$
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(5-12) ...
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                                  // k = 1
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} \left|R_{\iota,k}\right|$
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                          // k = 1
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|             // i = 2
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$ `// n.z.t.`
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                                   // k = 1
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|                      // i = 2
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do                           // j = 2
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10}$$

(1-3) …
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} =$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{2,1} \cdot R_{1,1:4}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ // i = 2
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** // j = 2
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} = (2, 1, 0, 0)^T - 1/5 \cdot (10, 20, 5, 0)^T$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                          // k = 1
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|             // i = 2
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 2
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} = (0, -3, -1, 0)^T$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 2`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 2`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                              // k = 1
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|                 // i = 2
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $\quad i \leftarrow \text{argmax}_{\iota \geqslant k} \left|R_{\iota,k}\right|$
(6) $\quad P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $\quad R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $\quad L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) $\quad$ **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
(10) $\quad\quad L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $\quad\quad R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) $\quad$ **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

$$R_{3,1:4} = R_{3,1:4}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                          // k = 1
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geq k} |R_{\iota,k}|$
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = 0$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = 0$$

$$R_{4,1:4} = R_{4,1:4}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 1`
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 1

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k+1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(5) $\quad i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$
(6) $\quad P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $\quad R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $\quad L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) $\quad$ **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $\quad\quad L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $\quad\quad R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) $\quad$ **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) …
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ // i = 3
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                          // k = 2
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|             // i = 3
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do                  // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} =$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{3,2} \cdot R_{2,2:4}$$

(1-3) ...

(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`

(5) $\quad i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`

(6) $\quad P_k \longleftrightarrow P_i$

(7) $\quad R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

(8) $\quad L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

(9) $\quad$ **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 3`

(10) $\qquad L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

(11) $\qquad R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

(12) $\quad$ **end for**

(13) **end for**

(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} = (-3, -1, 0)^T + 1/2 \cdot (6, 4, 8)^T$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                          // k = 2
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|             // i = 3
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k+1 to 4 do                    // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} = (0, 1, 4)^T$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                          // k = 2
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|             // i = 3
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k+1 to 4 do                     // j = 3
        L_{j,k} ← R_{j,k} / R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = 0$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 2

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ // i = 3

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = 0$$

$$R_{4,2:4} = R_{4,2:4}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                               // k = 2
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|                  // i = 3
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do                       // j = 4
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 2`
    $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geq k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 3`
    $P_k \longleftrightarrow P_i$
    $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
    $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
        $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
        $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
    end for
end for
$P \leftarrow P^T$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} \left| R_{\iota,k} \right|$
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
(5) $i \leftarrow \text{argmax}_{\iota \geq k} |R_{\iota,k}|$
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 3
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geq k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 3
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ // i = 4
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} \left|R_{\iota,k}\right|$ `// i = 4`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // k = 3
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ // i = 4
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geq k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} =$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`

  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`

  $P_k \longleftrightarrow P_i$

  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`

    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

  end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{4,3} \cdot R_{3,3:4}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                                  // k = 3
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|                     // i = 4
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do                          // j = 4
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} = (1,4)^T - 1/10 \cdot (10,20)^T$$

...

for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**   `// k = 3`

    $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`

    $P_k \longleftrightarrow P_i$

    $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

    $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

    for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**   `// j = 4`

        $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

        $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

    end for

end for

$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & {\color{red}0} & {\color{red}2} \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} = (0, 2)^T$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** `// k = 3`
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do** `// j = 4`
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do                                // k = 3
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|                   // i = 4
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
...
for k ← 1 to 3 do
    i ← argmax_{ι≥k} |R_{ι,k}|        // i = 4
    P_k ⟷ P_i
    R_{k,k:4} ⟷ R_{i,k:4}
    L_{k,1:k−1} ⟷ L_{i,1:k−1}
    for j ← k + 1 to 4 do
        L_{j,k} ← R_{j,k}/R_{k,k}
        R_{j,k:n} ← R_{j,k:n} − L_{j,k} · R_{k,k:n}
    end for
end for
P ← P^T
```

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...
(4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`
(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$
(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
(9) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
(12) **end for**
(13) **end for**
(14) $P \leftarrow P^T$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

...
for $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
  $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{\iota \geqslant k} |R_{\iota,k}|$ `// i = 4`
  $P_k \longleftrightarrow P_i$
  $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$
  $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 4 **do**
    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
    $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$
  end for
end for
$P \leftarrow P^T$

LR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung: Beispiel

Berechne die *PLR*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{R}$$

Rekapitulation — Matrixzerlegungen (III)

LR-Faktorisierung: Weitere Probleme

Kondition und Konditionszahl

Die **Kondition** eines Problems beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten.

LR-Faktorisierung: Weitere Probleme

Kondition und Konditionszahl

Die **Kondition** eines Problems beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten.

Die **Konditionszahl** stellt ein Maß für die Kondition dar. Sie beschreibt den Faktor, um den der Eingangsfehler im ungünstigsten Fall verstärkt wird.

LR-Faktorisierung: Weitere Probleme

Kondition und Konditionszahl

Die **Kondition** eines Problems beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten.

Die **Konditionszahl** stellt ein Maß für die Kondition dar. Sie beschreibt den Faktor, um den der Eingangsfehler im ungünstigsten Fall verstärkt wird. Sie ist *unabhängig* von konkreten Lösungsverfahren, aber abhängig vom mathematischen Problem.

Man kann nun zeigen, dass man das zu lösende Problem $Ax = b$ mit einer LR-Zerlegung **drastisch** verschlechtern kann.

Beispiel 2.3

Betrachte die Matrix

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j \;\vee\; j = n \\ -1 & \text{, falls } j < i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für ihre Konditionszahl gilt $\kappa_1(A) = n$. Man kann zeigen, dass für ihre LR-Zerlegung gilt, dass $\kappa_1(R) = 2^n - 1 \gg \kappa_1(A)$.

LR-Faktorisierung: Weitere Probleme

Man kann nun zeigen, dass man das zu lösende Problem $Ax = b$ mit einer LR-Zerlegung **drastisch** verschlechtern kann.

Beispiel 2.3

Betrachte die Matrix

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = j \ \vee \ j = n \\ -1 & \text{, falls } j < i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für ihre Konditionszahl gilt $\kappa_1(A) = n$. Man kann zeigen, dass für ihre LR-Zerlegung gilt, dass $\kappa_1(R) = 2^n - 1 \gg \kappa_1(A)$. Selbst eine Pivotsuche hilft hier nicht!

Ebenso kann man eine *Fehlerwachsrate* durch

$$\rho = \frac{\max_{i,j} \left|R_{i,j}\right|}{\max_{i,j} \left|A_{i,j}\right|}$$

definieren. Man kann zeigen, dass für eine LR-Zerlegung *mit Pivotsuche*

$$\rho \leqslant 2^{m-1}$$

gilt. (*Siehe hierzu Beispiel 2.3*)

Lösen eines LGS — QR-Faktorisierung

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Lösen eines LGS — QR-Faktorisierung

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

Lösen eines LGS — QR-Faktorisierung

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

... sie sind *einfach* zu invertieren, ähnlich wie bei den *Permutationsmatrizen*:

$$Q^{-1} = Q^T$$

Lösen eines LGS — QR-Faktorisierung

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

... sie sind *einfach* zu invertieren, ähnlich wie bei den *Permutationsmatrizen*:

$$Q^{-1} = Q^T$$

... die Kondition[1] einer Matrix ändert sich durch Multiplikation mit einer orhtogonalen Matrix nicht, es gilt

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q \cdot A) \quad \textit{für alle invertierbaren Matrizen}.$$

[1]Die 2-Kondition κ_2 zumindest ...

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

... sie sind *einfach* zu invertieren, ähnlich wie bei den *Permutationsmatrizen*:

$$Q^{-1} = Q^T$$

... die Kondition[1] einer Matrix ändert sich durch Multiplikation mit einer orhtogonalen Matrix nicht, es gilt

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q \cdot A) \quad \textit{für alle invertierbaren Matrizen}.$$

Ziel

Zerlege eine Matrix $A = Q \cdot R$ in eine Matrix Q und R, wobei Q eine *orthogonale* und R eine *rechte, obere Dreiecksmatrix* ist.

[1] Die 2-Kondition κ_2 zumindest ...

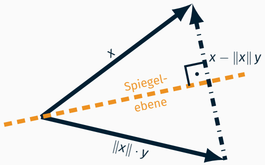
QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (I)

Idee (Householder)

Bei den Householderspiegelungen erzeugt man über sinnvoll gewählte Reflektionsmatrizen Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.

Idee (Householder)

Bei den Householderspiegelungen erzeugt man über sinnvoll gewählte Reflektionsmatrizen Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.

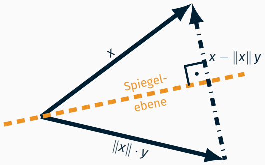


Konstruktion eines Spiegelvektors von x auf $\|x\|\,y$ mit $\|y\| = 1$

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (I)

Idee (Householder)

Bei den Householderspiegelungen erzeugt man über sinnvoll gewählte Reflektionsmatrizen Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.



Konstruktion eines Spiegelvektors von x auf $\|x\|\, y$ mit $\|y\| = 1$

Spiegelungen an einer Ebene orthogonal zu einem *Einheits*normalenvektor v werden durch die Matrix

$$H(v) = E_n - 2 \cdot vv^T$$

beschrieben.

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (II)

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (II)

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Der Skizze entnehmen wir, dass dies eine zu $x - \|x\| \, y$ orthogonale Hyperebene ist.

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (II)

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Der Skizze entnehmen wir, dass dies eine zu $x - \|x\|\, y$ orthogonale Hyperebene ist.
Mit $u = x - \|x\|\, y$ und $v = {}^{u}/_{\|u\|}$ erhält man dann

$$(E_n - 2vv^T)x = \|x\|\, y.$$

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (II)

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Der Skizze entnehmen wir, dass dies eine zu $x - \|x\| \, y$ orthogonale Hyperebene ist.
Mit $u = x - \|x\| \, y$ und $v = {}^{u}/_{\|u\|}$ erhält man dann

$$(E_n - 2vv^T)x = \|x\| \, y.$$

Idee der Householderspiegelung

Wählen wir $y = \pm e_1$, wobei e_1 der erste Standardbasisvektor ist, so eliminieren wir alle Positionen von x bis auf die erste.

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (III)

Definition 2.4 (Householderspiegelung)

Bezüglich eines gegebenen Vektors $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ heißt die Matrix

$$H = H(v) := E_n - 2 \cdot \frac{vv^T}{\|v\|_2^2}$$

Householder-Spiegelungsmatrix. Ferner sei $H(0) = E_n$.

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (III)

Definition 2.4 (Householderspiegelung)

Bezüglich eines gegebenen Vektors $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ heißt die Matrix

$$H = H(v) := E_n - 2 \cdot \frac{vv^T}{\|v\|_2^2}$$

Householder-Spiegelungsmatrix. Ferner sei $H(0) = E_n$.

Satz 2.5 (Spiegelungsmatrizen)

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist $H(v)$ symmetrisch und orthogonal, es gilt also

$$H^{-1} = H^T = H.$$

Algorithmus 2.3 — QR *mit* Householder-Spiegelungen

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ausgabe : Q, R, so dass $A = QR$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** $\min(m, n-1)$ **do**

$\quad x \leftarrow R_{k:n,k}$

$\quad e_1^k \leftarrow \begin{pmatrix} 1, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}^T$ // Länge von e_1^k ist $n - k + 1$

$\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$

$\quad H_k' \leftarrow \mathbb{1}_{n-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$

$\quad H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H_k' \end{array}\right)$

$\quad Q \leftarrow Q \cdot H_k$

$\quad R \leftarrow H_k \cdot R$

end for

QR-Faktorisierung: Householder-Spiegelungen (V)

Komplexität (Householder)

Wir erkennen schnell, dass bei einer *effizienten Implementierung* insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot n^3 + \mathcal{O}(n^2) &\qquad \text{Additionen/Multiplikationen und} \\ n - 1 &\qquad \text{Wurzelberechnungen} \end{aligned}$$

notwendig sind. Dies ist eine **klare Verschlechterung der Laufzeit** gegenüber den LR-Zerlegungen.

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Spiegelungen.

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 3-1)$ **do**
(4-10) ...
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 3-1)$ **do**
(4-10) …
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 3-1)$ **do**
  $x \leftarrow R_{k:3,k}$
  $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array}\right)$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
  $R \leftarrow H_k \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**

  $x \leftarrow R_{k:3,k}$

  $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}^T$

  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$

  $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$

  $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array}\right)$

  $Q \leftarrow Q \cdot H_k$

  $R \leftarrow H_k \cdot R$

end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \left(12 \, , 6 \, , -4 \right)^T$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                                   // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ||x||_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · (u u^T) / ||u||_2^2
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \; , 6 \; , -4 \end{pmatrix}^T$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) $\quad x \leftarrow R_{1:3,1}$
(5) $\quad e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \; , 0 \; , 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_1 \leftarrow H_1'$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_1$
(10) $\quad R \leftarrow H_1 \cdot R$
(11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \,, 6 \,, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2}$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                         // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ||x||_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · (u u^T) / ||u||_2^2
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \,, 6 \,, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{196}$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                          // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ||x||_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · (u u^T) / ||u||_2^2
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \,,\, 6 \,,\, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 \,,\, 6 \,,\, -4 \end{pmatrix}^T$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 1
(4) $x \leftarrow R_{1:3,1}$
(5) $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \,,\, 0 \,,\, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $H_1 \leftarrow H_1'$
(9) $Q \leftarrow Q \cdot H_1$
(10) $R \leftarrow H_1 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12\,, 6\,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2\,, 6\,, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2}$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                         // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ‖x‖_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · (u u^T)/(‖u‖_2^2)
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \,,\, 6 \,,\, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 \,,\, 6 \,,\, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
  $x \leftarrow R_{1:3,1}$
  $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \,,\, 0 \,,\, 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_1 \leftarrow H_1'$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_1$
  $R \leftarrow H_1 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \,, 6 \,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 \,, 6 \,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                                  // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ||x||_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · (u u^T) / ||u||_2^2
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12\,, 6\,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2\,, 6\,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\sqrt{56}^2}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 1
  $x \leftarrow R_{1:3,1}$
  $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1\,, 0\,, 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_1 \leftarrow H_1'$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_1$
  $R \leftarrow H_1 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12\,, 6\,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2\,, 6\,, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{56}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) $\quad x \leftarrow R_{1:3,1}$
(5) $\quad e_1^1 = \begin{pmatrix} 1\,, 0\,, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_1 \leftarrow H_1'$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_1$
(10) $\quad R \leftarrow H_1 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \, , 6 \, , -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 \, , 6 \, , -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`

- $x \leftarrow R_{1:3,1}$
- $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \, , 0 \, , 0 \end{pmatrix}^T$
- $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- $H_1 \leftarrow H_1'$
- $Q \leftarrow Q \cdot H_1$
- $R \leftarrow H_1 \cdot R$

end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2, 6, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                         // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ||x||_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · u u^T / ||u||_2^2
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12\,,\,6\,,\,-4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2\,,\,6\,,\,-4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`

  $x \leftarrow R_{1:3,1}$

  $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1\,,\,0\,,\,0 \end{pmatrix}^T$

  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$

  $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$

  $H_1 \leftarrow H_1'$

  $Q \leftarrow Q \cdot H_1$

  $R \leftarrow H_1 \cdot R$

end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 , 6 , -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 , 6 , -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_n
R ← A
for k ← 1 to 2 do                    // k = 1
    x ← R_{1:3,1}
    e_1^1 = ( 1 , 0 , 0 )^T
    u ← x − ||x||_2 · e_1^k
    H'_1 ← 𝟙_3 − 2 · uu^T / ||u||_2^2
    H_1 ← H'_1
    Q ← Q · H_1
    R ← H_1 · R
end for
```

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \,,\, 6 \,,\, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 \,,\, 6 \,,\, -4 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
  $x \leftarrow R_{1:3,1}$
  $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \,,\, 0 \,,\, 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_1 \leftarrow H_1'$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_1$
  $R \leftarrow H_1 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
  $x \leftarrow R_{k:3,k}$
  $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array}\right)$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
  $R \leftarrow H_k \cdot R$
end for

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \, , \, 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{30625}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
(4) $x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \, , \, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \; , \; 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{30625}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
$\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
$\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \; , \; 0 \end{pmatrix}^T$
$\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
$\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
$\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
$\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
$\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \, , 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-49)^2 + 168^2}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
  $x \leftarrow R_{2:3,2}$
  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \, , 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$
  $R \leftarrow H_2 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \,, 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{30625}$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \,, 168 \end{pmatrix}^T$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
(4) $x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \,, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \, , \, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \, , \, 168 \end{pmatrix}^T$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`

  $x \leftarrow R_{2:3,2}$

  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \, , \, 0 \end{pmatrix}^T$

  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$

  $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$

  $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$

  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$

  $R \leftarrow H_2 \cdot R$

end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \,, 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{(-224)^2 + 168^2}$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) $\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \,, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49\ , 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224\ , 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = 280$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
  $x \leftarrow R_{2:3,2}$
  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1\ , 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$
  $R \leftarrow H_2 \cdot R$
end for

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \,,\, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \,,\, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) $\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \,,\, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49\,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224\,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
  $x \leftarrow R_{2:3,2}$
  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1\,, 0 \end{pmatrix}^T$
  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
  $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
  $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$
  $R \leftarrow H_2 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \,,\, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \,,\, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) $\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \,,\, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) $\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \,, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \,, 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2' = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) $\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \,, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \, , 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \, , 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
 $x \leftarrow R_{2:3,2}$
 $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \, , 0 \end{pmatrix}^T$
 $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
 $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
 $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
 $Q \leftarrow Q \cdot H_2$
 $R \leftarrow H_2 \cdot R$
end for

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49\,,\,168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224\,,\,168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
(4) $\quad x \leftarrow R_{2:3,2}$
(5) $\quad e_1^2 = \begin{pmatrix} 1\,,\,0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_2$
(10) $\quad R \leftarrow H_2 \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & -158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 \, , 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 \, , 168 \end{pmatrix}^T \qquad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2

  $x \leftarrow R_{2:3,2}$

  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \, , 0 \end{pmatrix}^T$

  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$

  $H_2' \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$

  $H_2 \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$

  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$

  $R \leftarrow H_2 \cdot R$

end for

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & -158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
(4) $\quad x \leftarrow R_{k:3,k}$
(5) $\quad e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_k$
(10) $\quad R \leftarrow H_k \cdot R$
(11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & -158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
(4) $\quad x \leftarrow R_{k:3,k}$
(5) $\quad e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}^T$
(6) $\quad u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
(7) $\quad H_k' \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
(8) $\quad H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H_2' \end{array}\right)$
(9) $\quad Q \leftarrow Q \cdot H_k$
(10) $\quad R \leftarrow H_k \cdot R$
(11) **end for**

QR-Faktorisierung: Householder — Beispiel

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Spiegelungen.

Lösung:

$$A = \underbrace{\frac{1}{175} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 69 & -58 \\ 75 & -158 & 6 \\ -50 & -30 & -165 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}}_{R}$$

Definition 2.6 (Givensrotation)

Die Matrix

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni J_{i,j}(c,s) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& c &&&& -s &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& s &&&& c &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \ j \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} &&& \uparrow &&&& \uparrow &&& \\ &&& j &&&& i &&& \end{array} & \end{array}$$

mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ und $c^2 + s^2 = 1$ heißt Givensrotation.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (I)

Definition 2.6 (Givensrotation)

Die Matrix

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni J_{i,j}(c,s) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, k \neq i, k \neq j \\ c = \cos(\varphi) & \text{für } k = l = j, k = l = i \\ s = \sin(\varphi) & \text{für } k = j, l = i \\ -s = -\sin(\varphi) & \text{für } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$ und $c^2 + s^2 = 1$ heißt Givensrotation. Sie beschreibt eine Rotation um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn in der (i, j)-Ebene. Deswegen bezeichnet man sie — mit $c = \cos(\varphi)$ und $s = \sin(\varphi)$ — auch oft als $J_{i,j}(\varphi)$.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (I)

Definition 2.6 (Givensrotation)

Die Matrix

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni J_{i,j}(c,s) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, k \neq i, k \neq j \\ c = \cos(\varphi) & \text{für } k = l = j, k = l = i \\ s = \sin(\varphi) & \text{für } k = j, l = i \\ -s = -\sin(\varphi) & \text{für } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ und $c^2 + s^2 = 1$ heißt Givensrotation. Man bezeichnet sie — mit $c = \cos(\varphi)$ und $s = \sin(\varphi)$ — auch oft als $J_{i,j}(\varphi)$.

Lemma 2.7

Die Givensrotationen sind orthogonal und es gilt:

$$J_{i,j}^{-1}(\varphi) = J_{i,j}(-\varphi) = J_{i,j}^{T}(\varphi)$$

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (II)

Man kann den Algorithmus zur QR-Zerlegung nun mit einem einfachen 2×2-Beispiel motivieren. Angenommen wir haben eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

welche wir auf obere Dreiecksform durch Multiplikation mit der Givensrotation im $\mathbb{R}^2$ bringen wollen.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (II)

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c,s)\cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c,s)\cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Äquivalent ist eine Forderung von $s\alpha = -c\gamma$.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (II)

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c,s)\cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Äquivalent ist eine Forderung von $s\alpha = -c\gamma$.
Mit der Bedingung an J ergibt sich dann für $(\alpha,\gamma) \neq (0,0)$ eine Lösung von

$$c(\alpha,\gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \qquad \text{und} \qquad s(\alpha,\gamma) = \frac{-\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}.$$

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (II)

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c,s)\cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Äquivalent ist eine Forderung von $s\alpha = -c\gamma$.
Mit der Bedingung an J ergibt sich dann für $(\alpha,\gamma) \neq (0,0)$ eine Lösung von

$$c(\alpha,\gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \qquad \text{und} \qquad s(\alpha,\gamma) = \frac{-\operatorname{sgn}(\alpha)^2\cdot\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}.$$

[2] Hierbei ist $\operatorname{sgn}(x)$ definiert als $+1$ für $x \geqslant 0$ und -1 sonst.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (III)

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c, s)$ mit A **nur** die i-te und j-te Zeile von A betrifft.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (III)

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c, s)$ mit A **nur** die i-te und j-te Zeile von A betrifft.

Idee

Beim Durchlaufen der Spalten, eliminieren wir jeden Eintrag $a_{ij} \neq 0$, mit $i > j$, durch eine ebensolche Givensrotation im $\mathbb{R}^n$.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (III)

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c,s)$ mit A **nur** die i-te und j-te Zeile von A betrifft.

Idee

Beim Durchlaufen der Spalten, eliminieren wir jeden Eintrag $a_{ij} \neq 0$, mit $i > j$, durch eine ebensolche Givensrotation im $\mathbb{R}^n$. Für c, s übernimmt a_{jj} die Rolle von α und a_{ij} die Rolle von γ.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (III)

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c,s)$ mit A **nur** die i-te und j-te Zeile von A betrifft.

Idee

Beim Durchlaufen der Spalten, eliminieren wir jeden Eintrag $a_{ij} \neq 0$, mit $i > j$, durch eine ebensolche Givensrotation im $\mathbb{R}^n$. Für c, s übernimmt a_{jj} die Rolle von α und a_{ij} die Rolle von γ. Es gilt dann:

$$c = \frac{\operatorname{sgn}(a_{jj}) \cdot a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \qquad \text{und} \qquad s = \frac{-\operatorname{sgn}(a_{jj}) \cdot a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}}$$

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (IV)

Algorithmus 2.4 — QR-Faktorisierung *mit* Givens-Rotationen

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ausgabe : Q, R, so dass $A = QR$

```
(1) Q ← 𝟙_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to min(m, n − 1) do
(4)     for j ← k + 1 to n do
(5)         J_jk ← Givens-Rotation(R, j, k)
(6)         R ← J_jk · R
(7)         Q ← Q · J_jk^T
(8)     end for
(9) end for
```

Komplexitäten im Vergleich (Householder vs. Givensrotation)

Man erkennt, dass obiger Algorithmus eine ungefähre Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, vorausgesetzt man implementiert *sinnvoll*.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (V)

Komplexitäten im Vergleich (Householder vs. Givensrotation)

Man erkennt, dass obiger Algorithmus eine ungefähre Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, vorausgesetzt man implementiert *sinnvoll*.

Bei einer allgemeinen $n \times n$-Matrix braucht man allerdings $n \cdot {}^{(n-1)}/_{2}$ Givensrotationen, wohingegen man nur $n - 1$ Householder-Spiegelungen braucht.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen (V)

Komplexitäten im Vergleich (Householder vs. Givensrotation)

Man erkennt, dass obiger Algorithmus eine ungefähre Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, vorausgesetzt man implementiert *sinnvoll*.
Bei einer allgemeinen $n \times n$-Matrix braucht man allerdings $n \cdot {}^{(n-1)}/_{2}$ Givensrotationen, wohingegen man nur $n-1$ Householder-Spiegelungen braucht.

Man möchte Givensrotationen vor allem bei dünnbesetzten Bandmatrizen verwenden, da sich hier ein Laufzeitgewinn feststellen lässt.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen.

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 2)$ **do**
  for $j \leftarrow k + 1$ **to** 3 **do**
    $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R,\ j,\ k)$
    $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
    $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
  end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 2)$ **do**
  for $j \leftarrow k + 1$ **to** 3 **do**
    $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R,\ j,\ k)$
    $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
    $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
  end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$

$R \leftarrow A$

for $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3,2)$ **do**

  for $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**

    $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R,\ j,\ k)$

    $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$

    $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$

  end for

end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do
    for j ← k + 1 to 3 do
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 2`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8)   **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                      // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do              // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} {\color{blue}8} & 7 & 7 \\ {\color{red}6} & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{{\color{blue}a_{11}}}{\sqrt{{\color{blue}a_{11}^2} + {\color{red}a_{21}^2}}}$$

$$\sqrt{{\color{blue}a_{11}^2} + {\color{red}a_{21}^2}} = \sqrt{{\color{blue}8^2} + {\color{red}6^2}} = \sqrt{10^2} = 10$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                     // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do             // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                  // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do          // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$s = -\frac{\operatorname{sgn}(a_{11}) \cdot a_{21}}{10}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 2`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$s = -\frac{{\color{red}6}}{10}$$

```
Q ← 𝟙₃
R ← A
for k ← 1 to 2 do                    // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do            // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$s = -\frac{6}{10}$$

$$J_{21} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 2`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$s = -\frac{6}{10}$$

$$J_{21} = \begin{pmatrix} 8/10 & 6/10 & 0 \\ -6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                      // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do              // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8/10 & 6/10 & 0 \\ -6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                 // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do         // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙₃
R ← A
for k ← 1 to 2 do                  // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do          // j = 2
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & {}^{34}/_{5} \\ 0 & 3 & -{}^{13}/_{5} \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot J_{21}^T = \mathbb{1}_3 \cdot J_{21}^T = J_{21}^T$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 2`
(5) $J_{jk} \leftarrow$ `GivRot`(R, j, k)
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                    // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do            // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow$ `GivRot`(R, j, k)
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26$$

```
(1) Q ← 𝟙₃
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do                  // k = 1
(4)     for j ← k + 1 to 3 do          // j = 3
(5)         J_jk ← GivRot(R, j, k)
(6)         R ← J_jk · R
(7)         Q ← Q · J_jk^T
(8)     end for
(9) end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26$$

$$s = -\frac{\operatorname{sgn}(a_{11}) \cdot a_{31}}{26}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do        // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$s = -\frac{24}{26} = -12/13$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$s = -\frac{24}{26} = -12/13$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
        $J_{jk} \leftarrow \mathtt{GivRot}(R, j, k)$
        $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
        $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
    end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$s = -\frac{24}{26} = -12/13$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
        $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
        $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
        $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
    end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = J_{31} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                      // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do              // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 1`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot J_{31}^T$$

```
Q ← 𝟙₃
R ← A
for k ← 1 to 2 do                      // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do              // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                // k = 1
    for j ← k + 1 to 3 do        // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
        $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
        $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
        $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
    end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8)   **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{22}}{\sqrt{{a_{22}}^2 + {a_{32}}^2}}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                 // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do         // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{22}}{\sqrt{{a_{22}}^2 + {a_{32}}^2}}$$

$$\sqrt{{a_{22}}^2 + {a_{32}}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

```
Q ← 𝟙₃
R ← A
for k ← 1 to 2 do                 // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do         // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & {\color{red}3} & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{{\color{red}3}}{5}$$

$$\sqrt{{\color{red}a_{22}}^2 + a_{32}^2} = \sqrt{{\color{red}3}^2 + (-4)^2} = 5$$

```
Q ← 𝟙₃
R ← A
for k ← 1 to 2 do                 // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do         // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{{a_{22}}^2 + {a_{32}}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$s = -\frac{\operatorname{sgn}(a_{22}) \cdot a_{32}}{5}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                       // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do               // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$s = -\frac{(-4)}{5} = 4/5$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                  // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do          // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$s = -\frac{(-4)}{5} = 4/5$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                      // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do              // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$s = -\frac{(-4)}{5} = 4/5$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow$ `GivRot`(R, j, k)
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$R = J_{32} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```
Q ← 𝟙_3
R ← A
for k ← 1 to 2 do                      // k = 2
    for j ← k + 1 to 3 do              // j = 3
        J_jk ← GivRot(R, j, k)
        R ← J_jk · R
        Q ← Q · J_jk^T
    end for
end for
```

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
(5) $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \cdot J_{32}^T$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
(4) **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** // j = 3
(5) $J_{jk} \leftarrow \mathtt{GivRot}(R, j, k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8) **end for**
(9) **end for**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** `// k = 2`
    for $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do** `// j = 3`
        $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R, j, k)$
        $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
        $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
    end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = {}^1\!/_{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 2
  for $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
    $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R,\ j,\ k)$
    $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
    $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
  end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = {}^{1}\!/_{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
(2) $R \leftarrow A$
(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
(4)   **for** $j \leftarrow k+1$ **to** 3 **do**
(5) $J_{jk} \leftarrow \mathtt{GivRot}(R,\ j,\ k)$
(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
(8)   **end for**
(9) **end for**

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = {}^1\!/_{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
$R \leftarrow A$
for $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
    for $j \leftarrow k + 1$ **to** 3 **do**
        $J_{jk} \leftarrow \texttt{GivRot}(R,\ j,\ k)$
        $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
        $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
    end for
end for

QR-Faktorisierung: Givens-Rotationen — Beispiel

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen.

Lösung:

$$A = \underbrace{\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{R}$$

Hausaufgabe — LR- und QR-Zerlegung

StudOn-Hausaufgabe — LR- und QR-Zerlegung

Diese Hausaufgabe findet sich **komplett** auf StudOn!

Zusätzliche Literatur

Zusätzliche Literatur zur 2. Übung (1)

[1] T. F. Chan. „On the Existence and Computation of LU-Factorizations with Small Pivots“. In: *Mathematics of Computation* 42.166 (Apr. 1984), S. 535. DOI: 10.2307/2007600. URL: https://doi.org/10.2307/2007600.

[2] X.-W. Chang. In: *Bit Numerical Mathematics* 42.1 (2002), S. 66–83. DOI: 10.1023/a:1021970102451. URL: https://doi.org/10.1023/a:1021970102451.

[3] L. Fernández und J. Garcia. „The Performance of Fast Givens Rotations Problem Implemented with MPI Extensions in Multicomputers“. In: (Dez. 1999).

[4] W. Ford. *Numerical Linear Algebra with Applications*. Elsevier, 2015. DOI: 10.1016/c2011-0-07533-6. URL: https://doi.org/10.1016/c2011-0-07533-6.

Zusätzliche Literatur zur 2. Übung (2)

[5] C. Gauss. *Disquisitio de elementis ellipticis palladis ex opposiotionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809.* 1810. URL: https://books.google.de/books?id=j21FGwAACAAJ.

[6] G. H. Golub und C. F. van Loan. *Matrix Computations*. Fourth. JHU Press, 2013. ISBN: 9781421407944. URL: http://www.cs.cornell.edu/cv/GVL4/golubandvanloan.htm.

[7] N. Higham. „Gaussian elimination“. In: 2011. URL: https://www.maths.manchester.ac.uk/~higham/papers/high11g.pdf.

[8] A. S. Householder. „A Class of Methods for Inverting Matrices“. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 6.2 (1958), S. 189–195. ISSN: 03684245. URL: http://www.jstor.org/stable/2098735.

Zusätzliche Literatur zur 2. Übung (3)

[9] A. S. Householder. „Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix“. In: *Journal of the ACM* 5.4 (Okt. 1958), S. 339–342. DOI: 10.1145/320941.320947. URL: https://doi.org/10.1145/320941.320947.

[10] L. Neal und G. Poole. „A geometric analysis of Gaussian elimination. II“. In: *Linear Algebra and its Applications* 173 (Aug. 1992), S. 239–264. DOI: 10.1016/0024-3795(92)90432-a. URL: https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90432-a.

[11] G. Poole und L. Neal. „A geometric analysis of Gaussian elimination. I“. In: *Linear Algebra and its Applications* 149 (1991), S. 249–272. ISSN: 0024-3795. DOI: https://doi.org/10.1016/0024-3795(91)90337-V. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002437959190337V.

Zusätzliche Literatur zur 2. Übung (4)

[12] G. Poole und L. Neal. „The Rook's pivoting strategy“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123.1-2 (Nov. 2000), S. 353–369. DOI: 10.1016/s0377-0427(00)00406-4. URL: https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00406-4.

[13] G. Strang. *Linear algebra and learning from data*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2019. ISBN: 978-06921963-8-0.

[14] L. N. Trefethen. „Three mysteries of Gaussian elimination“. In: *ACM SIGNUM Newsletter* 20.4 (Okt. 1985), S. 2–5. DOI: 10.1145/1057954.1057955. URL: https://doi.org/10.1145/1057954.1057955.

Anhang zur Übung 2

Einschub zur Übung 2: Beweis zur Aufgabe 1

Wir wollen hier aus Zeit- und Platzgründen den ausgelassenen Beweis der Teilaufgaben b und c von Aufgabe 1 nachholen:

Satz 2.A (Aufgabe 1b + c)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $m \in \mathbb{N}^+$ eine tridiagonale Matrix mit der Diagonalen $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ und den Nebendiagonalen $[b_i, c_i]_{1\leqslant i\leqslant m-1}$, so hat eine LR-Zerlegung von A, sofern diese existiert, die Form

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_{m-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & r_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & r_m \end{pmatrix},$$

mit

$$\ell_i = a_i \cdot \frac{\delta_{i-1}}{\delta_i}, \; r_i = \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} \quad \text{und} \quad \delta_i := \begin{cases} 1 & \text{, wenn } i = 0 \\ b_1 & \text{, wenn } i = 1 \\ b_i \cdot \delta_{i-1} - a_{i-1}c_{i-1}\delta_{i-2} & \text{, wenn } i \geqslant 2. \end{cases}$$

Einschub zur Übung 2: Beweis zur Aufgabe 1

Beweis

Der hier ausgeführte Beweis ist eher technischer Art und zeigt, dass das Produkt der Matrizen L und R gleich der Matrix A ist.
Wir sehen schnell ein, dass für das Produkt der beiden Matrizen L und R gilt:

$$LR = \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ r_1\ell_1 & r_2 + c_1\ell_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & r_{m-1}\ell_{m-1} & r_m + c_{m-1}\ell_{m-1} \end{pmatrix}$$

Das überprüft man einfach eintragsweise mit den jeweiligen Spalten und Zeilen aus L resp. R.

Einschub zur Übung 2: Beweis zur Aufgabe 1

Beweis (Fort.)

Schaut man sich dabei die Einträge etwas genauer an, so stellt man fest:

- $(LR)_{1,1} = r_1 = \frac{\delta_1}{\delta_0} = b_1$
- $(LR)_{k,k+1} = c_k$ für $1 \leqslant k \leqslant m-1$
- $(LR)_{k,k-1} = r_k \ell_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \cdot a_k \cdot \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} = a_k$ für $2 \leqslant k \leqslant m$
- $(LR)_{k,k} = r_k + c_{k-1} \cdot \ell_{k-1} = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} + c_{k-1} \cdot a_{k-1} \cdot \frac{\delta_{k-2}}{\delta_{k-1}} = b_k$ für $2 \leqslant k \leqslant m$
- $(LR)_{k,l} = 0$ für $|k-l| \geqslant 2$.

Doch damit gilt dann $LR = A$. $\square$