

Übung zur Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Sommersemester 2021

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg



FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

TECHNISCHE FAKULTÄT

Dieser Foliensatz enthält den Inhalt der Übung zur „Algorithmik kontinuierlicher Systeme“ des Sommersemesters 2021. Für den Inhalt dieses Foliensatzes ist der Author allein verantwortlich. Der Foliensatz ist **inoffiziell** und stellt damit **keine** Veröffentlichung des Lehrstuhls für Systemsimulation dar. Bei Unstimmigkeiten und eventuell vorhandenen Fehlern bitte ich um eine E-Mail^a.

^aan florian.ff.frank@fau.de

Organisatorisches

Matrixzerlegungen

Anhang

Übung zur Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Übung 0 – Organisatorisches

Sommersemester 2021

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg



Kontakt

Name: Florian Frank

3. Semester Informatik (Master)

E-Mail: florian.ff.frank@fau.de

↪ Bei Fragen, Kritik, Anregungen oder Ähnlichem

Wo finde ich die Folien?

↪ <http://www.cip.cs.fau.de/~yq53ykyr/AlgoKS>

Zeit und Ort

Donnerstags

10:15 – 11:45 Uhr

~~02.134-113~~ Zoom-Meeting



Dieser Foliensatz

Diesen Foliensatz findet ihr auf meinem CIP-Webauftritt:

<http://wwwcip.cs.fau.de/~yq53ykyr/AlgoKS>

Er ist **offensichtlich inoffiziell** und somit *keine Veröffentlichung des Lehrstuhls*. Neben den aktuellen Folien zur Übung findet ihr auch zusätzliche Informationen, sowie eine Zusammenfassung vom Sommersemester 2018 mit Aufgaben zu den meisten Themengebieten.

Dieser Foliensatz

Diesen Foliensatz findet ihr auf meinem CIP-Webauftritt:

<http://wwwcip.cs.fau.de/~yq53ykyr/AlgoKS>

Er ist **offensichtlich inoffiziell** und somit *keine Veröffentlichung des Lehrstuhls*. Neben den aktuellen Folien zur Übung findet ihr auch zusätzliche Informationen, sowie eine Zusammenfassung vom Sommersemester 2018 mit Aufgaben zu den meisten Themengebieten.

- Forum der FSI Informatik:
 - <https://fsi.cs.fau.de/forum/41-Algorithmik-kontinuierlicher-Systeme>
 - Wenn ihr Fragen zum Fach habt, stellt sie hier ...

Dieser Foliensatz

Diesen Foliensatz findet ihr auf meinem CIP-Webauftritt:

<http://wwwcip.cs.fau.de/~yq53ykyr/AlgoKS>

Er ist **offensichtlich inoffiziell** und somit *keine Veröffentlichung des Lehrstuhls*. Neben den aktuellen Folien zur Übung findet ihr auch zusätzliche Informationen, sowie eine Zusammenfassung vom Sommersemester 2018 mit Aufgaben zu den meisten Themengebieten.

■ Forum der FSI Informatik:

- <https://fsi.cs.fau.de/forum/41-Algorithmik-kontinuierlicher-Systeme>
- Wenn ihr Fragen zum Fach habt, stellt sie hier ...
- *Sollten diese Fragen nur euch, eure Korrektur oder nicht die Allgemeinheit betreffen, stellt Fragen per E-Mail (siehe unten) oder an das AlgoKS-Team (Fragen zur Korrektur bitte per E-Mail).*

Dieser Foliensatz

Diesen Foliensatz findet ihr auf meinem CIP-Webauftritt:

<http://wwwcip.cs.fau.de/~yq53ykyr/AlgoKS>

Er ist **offensichtlich inoffiziell** und somit *keine Veröffentlichung des Lehrstuhls*. Neben den aktuellen Folien zur Übung findet ihr auch zusätzliche Informationen, sowie eine Zusammenfassung vom Sommersemester 2018 mit Aufgaben zu den meisten Themengebieten.

■ Forum der FSI Informatik:

- <https://fsi.cs.fau.de/forum/41-Algorithmik-kontinuierlicher-Systeme>
- Wenn ihr Fragen zum Fach habt, stellt sie hier ...
- *Sollten diese Fragen nur euch, eure Korrektur oder nicht die Allgemeinheit betreffen, stellt Fragen per E-Mail (siehe unten) oder an das AlgoKS-Team (Fragen zur Korrektur bitte per E-Mail).*

Kontakt

Name: Florian Frank

E-Mail: florian.ff.frank@fau.de

↪ Bei Fragen, Kritik, Anregungen oder Ähnlichem

Angemeldet für die Übungen?

Ihr solltet **alle** im zugehörigen *StudOn-Kurs* angemeldet sein!

Vorlesungsfolien und Übungsbetrieb – StudOn

Ihr findet die Vorlesungsfolien, wichtige Informationen, die Links zur Aufzeichnung, Übungsblätter und deren Abgabemöglichkeit im StudOn-Kurs:

<https://www.studon.fau.de/crs3736168.html>



Zoom Meeting

Audio only



With video



- Wie bereits aus den letzten drei Semestern bekannt wird die Übung über regelmäßige Zoom-Meetings realisiert.



- Wie bereits aus den letzten drei Semestern bekannt wird die Übung über regelmäßige Zoom-Meetings realisiert.
- Diese Meetings sollen ähnlich ablaufen wie gewöhnliche Tafelübungen, sprich:

- Wie bereits aus den letzten drei Semestern bekannt wird die Übung über regelmäßige Zoom-Meetings realisiert.

- Diese Meetings sollen ähnlich ablaufen wie gewöhnliche Tafelübungen, sprich:
 - man kann mich sehen;

- Wie bereits aus den letzten drei Semestern bekannt wird die Übung über regelmäßige Zoom-Meetings realisiert.
- Diese Meetings sollen ähnlich ablaufen wie gewöhnliche Tafelübungen, sprich:
 - man kann mich sehen;
 - man kann mich hören;

- Wie bereits aus den letzten drei Semestern bekannt wird die Übung über regelmäßige Zoom-Meetings realisiert.
- Diese Meetings sollen ähnlich ablaufen wie gewöhnliche Tafelübungen, sprich:
 - man kann mich sehen;
 - man kann mich hören;
 - man kann die geteilten Folien/Anschriften sehen.

- Wie bereits aus den letzten drei Semestern bekannt wird die Übung über regelmäßige Zoom-Meetings realisiert.
- Diese Meetings sollen ähnlich ablaufen wie gewöhnliche Tafelübungen, sprich:
 - man kann mich sehen;
 - man kann mich hören;
 - man kann die geteilten Folien/Anschriften sehen.
- Fragen können jederzeit über den Chat/Voicechat gestellt werden:

Fragenpolicy

Ihr könnt Fragen jederzeit stellen, indem ihr euch „unmutet“ und mich unterbrecht. Nur keine Scheu bei Fragen!

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.

(2) Wiederholung des für diese Übung notwendigen Stoffes

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.

(2) Wiederholung des für diese Übung notwendigen Stoffes

*Wir werden die grundlegenden Begriffe und Verfahren aus der Vorlesung **kurz** wiederholen, die ihr für die Bearbeitung der Aufgaben in der jeweiligen Woche benötigt.*

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.

(2) Wiederholung des für diese Übung notwendigen Stoffes

*Wir werden die grundlegenden Begriffe und Verfahren aus der Vorlesung **kurz** wiederholen, die ihr für die Bearbeitung der Aufgaben in der jeweiligen Woche benötigt.*

(3) Besprechung der Präsenzaufgabe

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.

(2) Wiederholung des für diese Übung notwendigen Stoffes

*Wir werden die grundlegenden Begriffe und Verfahren aus der Vorlesung **kurz** wiederholen, die ihr für die Bearbeitung der Aufgaben in der jeweiligen Woche benötigt.*

(3) Besprechung der Präsenzaufgabe

*Wir werden die Präsenzaufgabe **gemeinsam** erarbeiten. Insbesondere ist hierbei **Mitarbeit erwünscht!***

- (1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben
Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.
- (2) Wiederholung des für diese Übung notwendigen Stoffes
*Wir werden die grundlegenden Begriffe und Verfahren aus der Vorlesung **kurz** wiederholen, die ihr für die Bearbeitung der Aufgaben in der jeweiligen Woche benötigt.*
- (3) Besprechung der Präsenzaufgabe
*Wir werden die Präsenzaufgabe **gemeinsam** erarbeiten. Insbesondere ist hierbei **Mitarbeit erwünscht!***
- (4) Tipps und Tricks für die Hausaufgaben auf dem zu besprechenden Blatt.

(1) Besprechung der „alten“ Hausaufgaben

Wir besprechen an dieser Stelle Aufgaben, welche trickreich waren, ihr euch wünscht oder euch Probleme bereitet haben.

(2) Wiederholung des für diese Übung notwendigen Stoffes

*Wir werden die grundlegenden Begriffe und Verfahren aus der Vorlesung **kurz** wiederholen, die ihr für die Bearbeitung der Aufgaben in der jeweiligen Woche benötigt.*

(3) Besprechung der Präsenzaufgabe

*Wir werden die Präsenzaufgabe **gemeinsam** erarbeiten. Insbesondere ist hierbei **Mitarbeit erwünscht!***

(4) Tipps und Tricks für die Hausaufgaben auf dem zu besprechenden Blatt.

! Diese Übung ist **für euch**, deswegen gestaltet sie nach euren Wünschen. **Arbeitet mit**, denn nur so kann sie eventuelle Unklarheiten *rechtzeitig* beseitigen. **Stellt Fragen** sollten Dinge unklar sein.

„Scheinkriterium“

Es müssen **mindestens** 50 % der Punkte in den **Theorie-** sowie *Programmierabgaben* erreicht werden. Ein gegenseitiger Ausgleich ist dabei **nicht möglich!**

„Scheinkriterium“

Es müssen **mindestens** 50 % der Punkte in den **Theorie-** sowie *Programmierabgaben* erreicht werden. Ein gegenseitiger Ausgleich ist dabei **nicht möglich!**

- Alle Theorieblätter sind vollständig digitalisiert.

„Scheinkriterium“

Es müssen **mindestens** 50 % der Punkte in den **Theorie-** sowie *Programmierabgaben* erreicht werden. Ein gegenseitiger Ausgleich ist dabei **nicht möglich!**

- Alle Theorieblätter sind vollständig digitalisiert.
- Alle Abgaben erfolgen ausschließlich über **StudOn!**

„Scheinkriterium“

Es müssen **mindestens** 50 % der Punkte in den **Theorie-** sowie *Programmierabgaben* erreicht werden. Ein gegenseitiger Ausgleich ist dabei **nicht möglich!**

- Alle Theorieblätter sind vollständig digitalisiert.
- Alle Abgaben erfolgen ausschließlich über **StudOn!**
- Es sind **keine Gruppenabgaben!** Jeder muss einzeln die Theorie- wie auch Praxisaufgaben auf StudOn bearbeiten, bitte schreibt auch hier nicht ab!

„Scheinkriterium“

Es müssen **mindestens** 50 % der Punkte in den **Theorie-** sowie *Programmierabgaben* erreicht werden. Ein gegenseitiger Ausgleich ist dabei **nicht möglich!**

- Alle Theorieblätter sind vollständig digitalisiert.
- Alle Abgaben erfolgen ausschließlich über **StudOn!**
- Es sind **keine Gruppenabgaben!** Jeder muss einzeln die Theorie- wie auch Praxisaufgaben auf StudOn bearbeiten, bitte schreibt auch hier nicht ab!
- Die Theorieaufgaben haben bei jedem Start eine gewisse Zufallskomponente. Achtet also bitte darauf, dass eure Antworten zu den euch tatsächlich gestellten Fragen passen!



- Eine Sitzung jeder TÜ **wird** aufgezeichnet werden.



- Eine Sitzung jeder TÜ **wird** aufgezeichnet werden.
- Verfügbar über StudOn/FAU-Videoportal



- Eine Sitzung jeder TÜ **wird** aufgezeichnet werden.
- Verfügbar über StudOn/FAU-Videoportal
- Aufgenommen wird **nur** der Tutor, sowie seine freigegebenen Materialien.



- Eine Sitzung jeder TÜ **wird** aufgezeichnet werden.
- Verfügbar über StudOn/FAU-Videoportal
- Aufgenommen wird **nur** der Tutor, sowie seine freigegebenen Materialien.
- Die Aufzeichnung wird zu Beginn der Übung bekanntgegeben, sowie (*soweit möglich*) im Voraus.



- Eine Sitzung jeder TÜ **wird** aufgezeichnet werden.
- Verfügbar über StudOn/FAU-Videoportal
- Aufgenommen wird **nur** der Tutor, sowie seine freigegebenen Materialien.
- Die Aufzeichnung wird zu Beginn der Übung bekanntgegeben, sowie (*soweit möglich*) im Voraus.



Ihr wollt keine Fragen vor der Kamera stellen?

Kein Problem, die Fragen über den „normalen“ Chat werden selbstverständlich anonym behandelt.

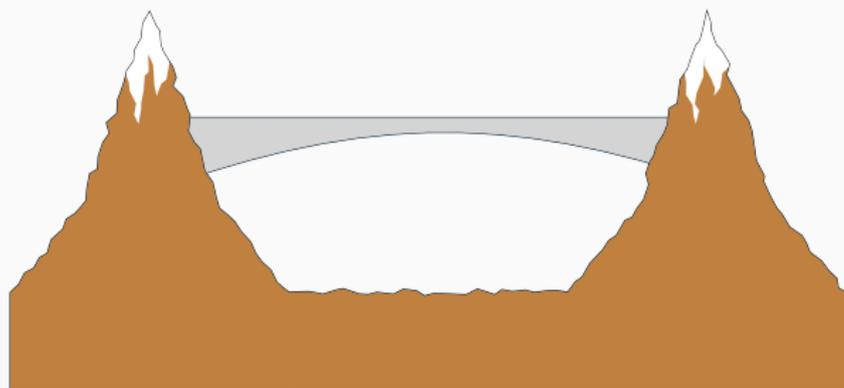
- Eine Sitzung jeder TÜ **wird** aufgezeichnet werden.
- Verfügbar über StudOn/FAU-Videoportal
- Aufgenommen wird **nur** der Tutor, sowie seine freigegebenen Materialien.
- Die Aufzeichnung wird zu Beginn der Übung bekanntgegeben, sowie (*soweit möglich*) im Voraus.



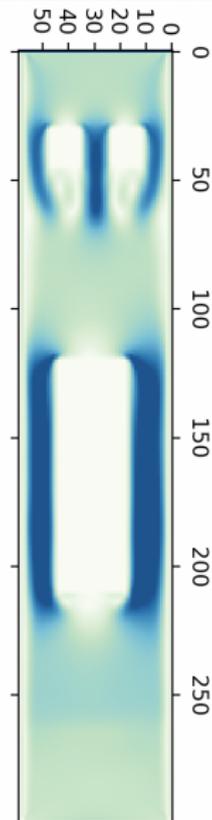
Wann kommen die Videos online?

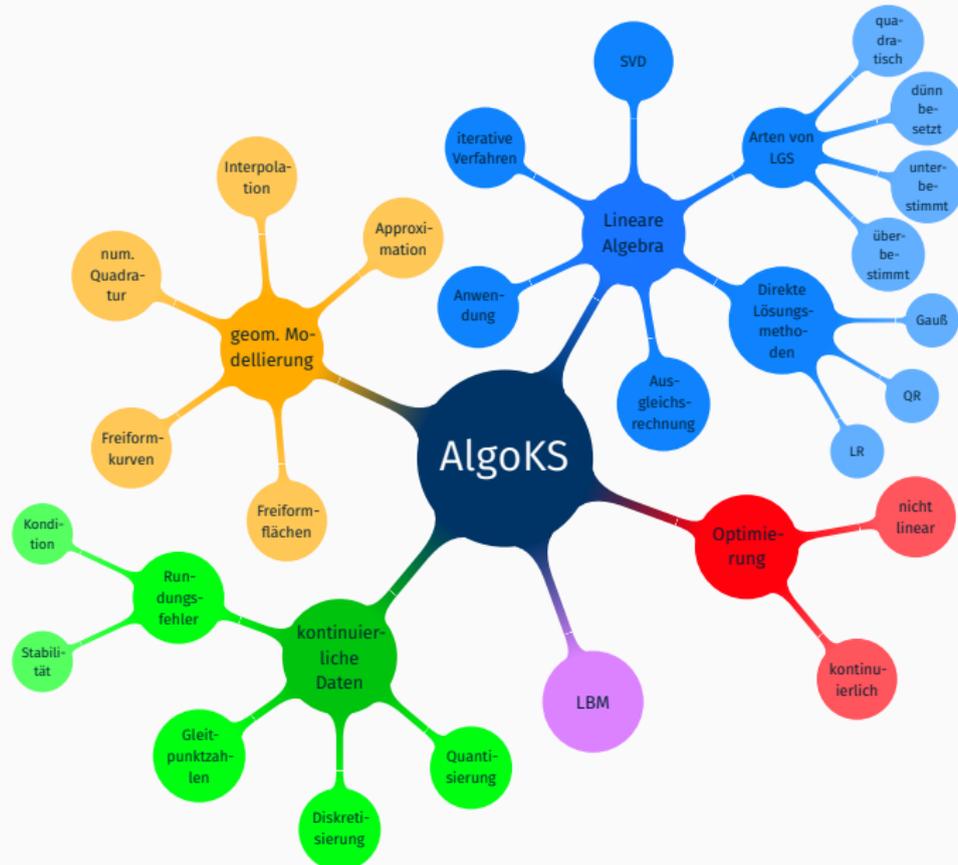
Die Videos zu den Tafelübungen werden jeweils im Laufe der Woche online gestellt.

Grundlagen der numerischen Behandlung *kontinuierlicher Probleme* in Theorie und Praxis.



Wo müssen bei gegebener Belastung Brückenpfeiler stehen, damit die Brücke nicht zusammenbricht?

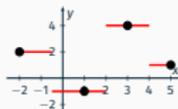




Lokale Interpolation (i) – nearest neighbour



Um den Wert an der Stelle x anzunähern, suche den nächsten Nachbarn, sprich die nächstgelegene Stützstelle x_i . Der interpolierte Wert ist dann mit y_i gegeben.



Für das Polynom gilt dann:

$$p(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für } x_1 \leq x \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_i & \text{für } \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) < x \leq \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \quad \text{für alle } 2 \leq i \leq n-1 \\ y_n & \text{für } \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) < x \leq x_n \end{cases}$$

„Normale“ Folien

Diese Folien werden wir gemeinsam in der Übung besprechen.

Lokale Interpolation (I) – nearest neighbour



Um den Wert an der Stelle x anzunähern, suche den nächsten Nachbarn, sprich die nächstgelegene Stützstelle x_i . Der interpolierte Wert ist dann mit y_i gegeben.

Für das Polynom gilt dann:

$$p(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für } x_1 \leq x \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_i & \text{für } \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) < x \leq \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \\ y_n & \text{für } \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) < x \leq x_n \end{cases}$$

© 2020 | Florian Frank | FAU | TutAlgoKS – Organisationsstruktur



Zusätzliche Literatur

Zusätzliche Literatur

Auf diesen Folien stehen Literaturhinweise für Studierende, welche sich näher mit der Materie beschäftigen wollen. Sie sind **nicht** für Klausur oder Übung relevant. Manchmal hilft aber vlt. auch ein Blick in die Literatur um einen anderen Blickwinkel auf Themen zu bekommen.

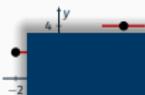
Lokale Interpolation (I) – nearest neighbour



Um den Wert an der Stelle x anzunähern, suche den nächsten Nachbarn, sprich die nächstgelegene Stützstelle x_i . Der interpolierte Wert ist dann mit y_i gegeben.

Für das Polynom gilt dann:

$$p(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für } x_1 \leq x \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_i & \text{für } \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) < x \leq \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \\ y_n & \text{für } \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) < x \leq x_n \end{cases}$$



Zusätzliche

Anhang zur Übung 2

Anhänge

Hier sind Folien, die nicht (mehr) vorgestellt werden, da sie über den Stoff hinausgehen oder die Zeit in der Übung dafür nicht ausreicht. Sie können angeschaut werden, sind aber meistens **nicht** für Hausaufgaben oder die Klausur relevant.

Übung zur Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Übung 2 – Matrixzerlegungen

Sommersemester 2021

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg



Wo stehen wir?

Rekapitulation – Matrixzerlegungen (I)

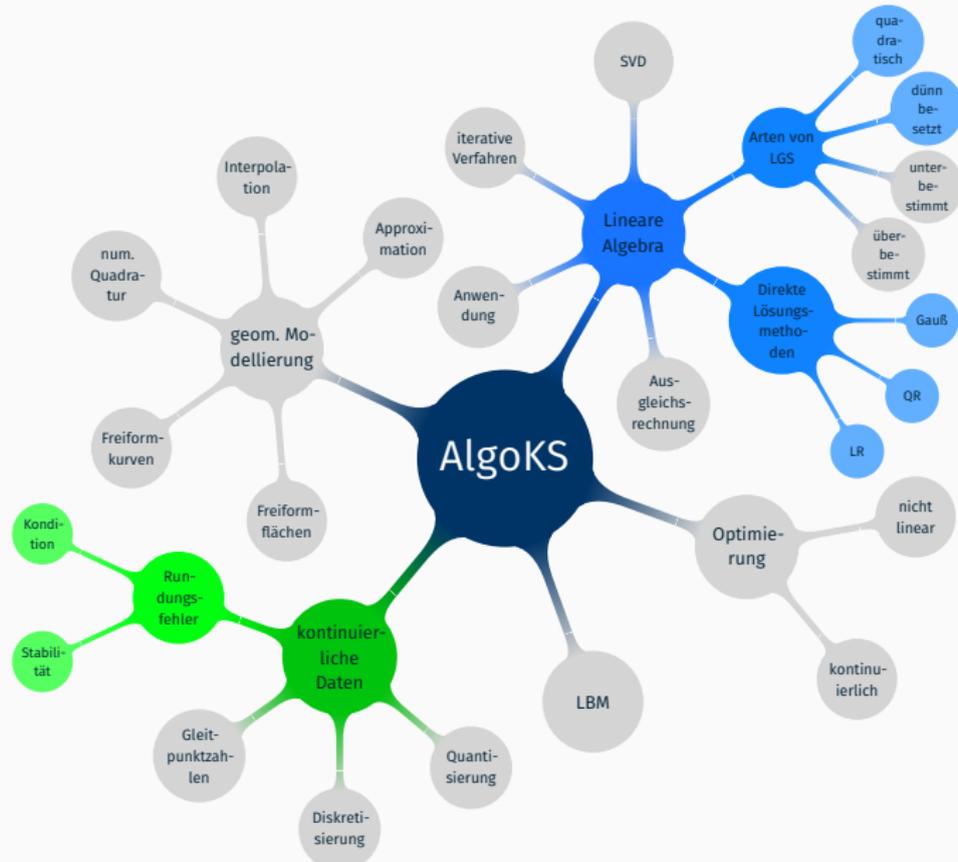
Aufgabe 1 – LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

Rekapitulation – Matrixzerlegungen (II)

Rekapitulation – Matrixzerlegungen (III)

Hausaufgabe – LR- und QR-Zerlegung

Wo stehen wir?



***Rekapitulation* –
Matrixzerlegungen (I)**

Ziel: Lösen eines linearen Gleichungssystems (LGS), wie zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 4 & -3 \\ 8 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 44 \\ 28 \\ -9 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$



Der Einfachheit sei angenommen, dass die hier betrachteten Matrizen allesamt *nicht-singulär* sind.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass *nicht-singuläre Matrizen* eine Inverse besitzen. Nun ist das LGS

$$A \cdot x = b$$

mit

$$x = A^{-1}b$$

eindeutig lösbar.

Aus... line...
eine In...

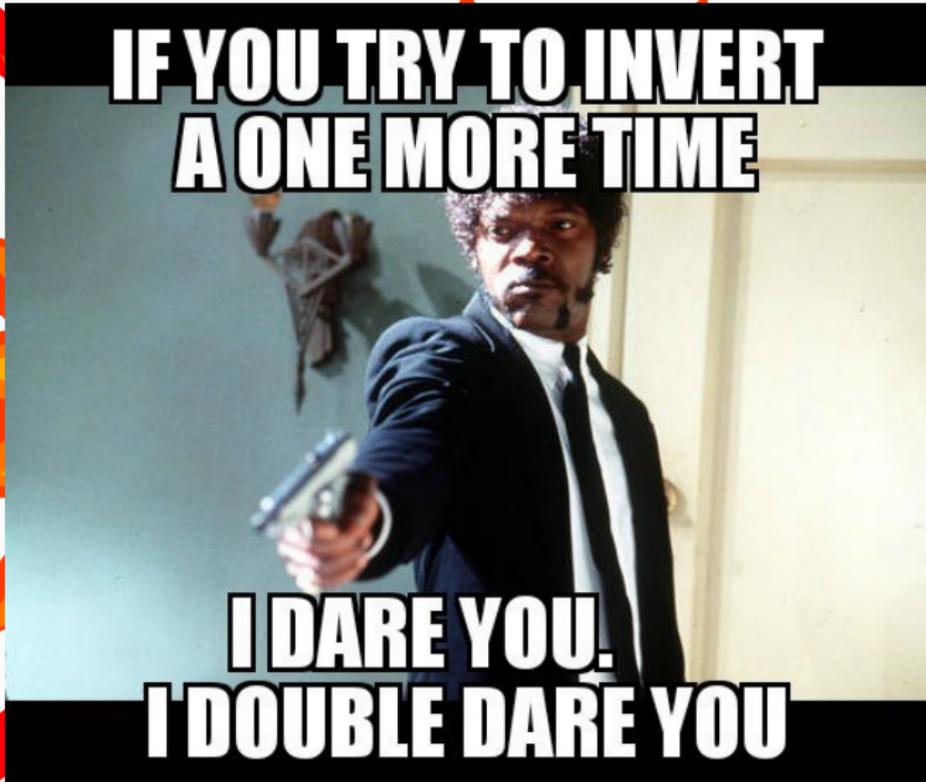
...e M... n

Dies ist eine sehr **naive** und
nicht besonders schlaue Idee!
Das Berechnen von Inversen
ist nur schlecht umsetzbar!

m...

eind... s losbr...

**IF YOU TRY TO INVERT
A ONE MORE TIME**



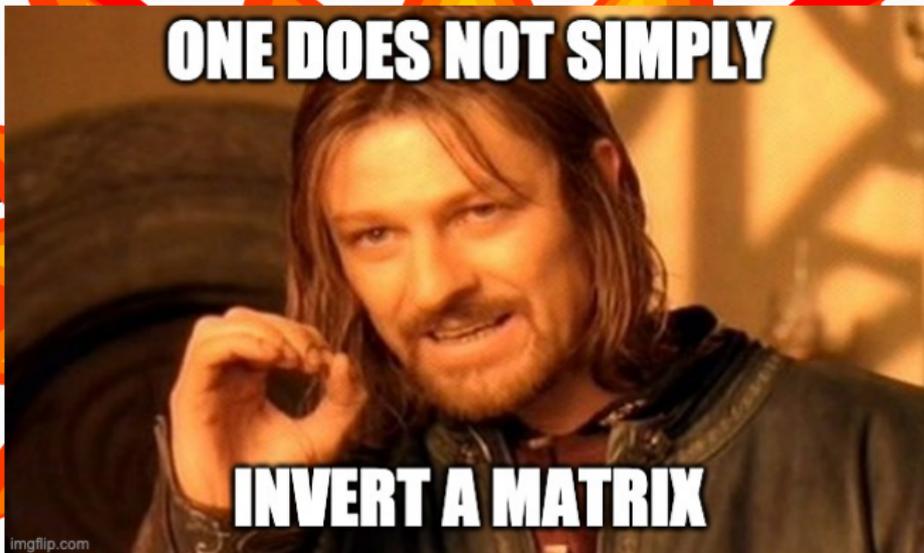
**I DARE YOU.
I DOUBLE DARE YOU**

Aus
eine In

m

eind

ONE DOES NOT SIMPLY



INVERT A MATRIX

imgflip.com

Aus
eine In

m

eind

Effizienz

Es braucht ungefähr $2 \cdot n^3$ Schritte bis eine Inverse berechnet wurde. Eine Faktorisierung braucht hier weniger Schritte.

Effizienz

Es braucht ungefähr $2 \cdot n^3$ Schritte bis eine Inverse berechnet wurde. Eine Faktorisierung braucht hier weniger Schritte.

Ebenso ist die inverse Matrix bei *dünnbesetzten Matrizen* im Allgemeinen **nicht dünnbesetzt**. Es kommt also bei großem n ($n \gtrsim 10^6$) nicht nur zu Zeitproblemen, sondern auch zu Speicherproblemen.

Mangelnde Fehlertoleranz

Sei $\varepsilon > 0$ klein, so ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 + \varepsilon & 100 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Angenommen ε sei 0.05, so gilt für A und A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

Mangelnde Fehlertoleranz

Sei $\varepsilon > 0$ klein, so ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100 + \varepsilon & 100 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Angenommen ε sei 0.05, so gilt für A und A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

Haben wir uns allerdings bei ε vermessen und ε läge bei 0.1 stattdessen, so gölte für A und A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Mangelnde Fehlertoleranz

$$\varepsilon = 1/20 : \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = 1/10 : \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so spränge x von $\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Mangelnde Fehlertoleranz

$$\varepsilon = 1/20 : \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = 1/10 : \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so spränge x von $\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Bei Faktorisierungen ist dieser Fehler im Allgemeinen nicht so groß!

Mangelnde Fehlertoleranz

$$\varepsilon = 1/20 : \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.05 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 20.01 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon = 1/10 : \quad A = \begin{pmatrix} 100 & 100 \\ 100.1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10.01 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sei $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so spränge x von $\begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Bei Faktorisierungen ist dieser Fehler im Allgemeinen nicht so groß!

Schlussfolgerung

Obwohl Matrizen nahe beieinanderliegen, muss dies nicht für ihre Inversen gelten!

Hierbei betrachten wir die erweiterte Systemmatrix des Problems

$$Ax = b$$

$$\left(A \mid b \right)$$

und formen sie durch Elementaroperationen zu einem äquivalenten Problem

$$Rx = \tilde{b}$$

um, wobei R eine *obere Dreiecksmatrix* ist.

Hierbei betrachten wir die erweiterte Systemmatrix des Problems

$$Ax = b$$

$$\left(A \mid b \right)$$

und formen sie durch Elementaroperationen zu einem äquivalenten Problem

$$Rx = \tilde{b}$$

um, wobei R eine *obere Dreiecksmatrix* ist.

Wir wandeln dadurch unser *schwierigeres* Problem in ein *einfach zu lösendes* Problem um.

Hierbei betrachten wir die erweiterte Systemmatrix des Problems

$$Ax = b$$

$$\left(A \mid b \right)$$

und formen sie durch Elementaroperationen zu einem äquivalenten Problem

$$Rx = \tilde{b}$$

um, wobei R eine *obere Dreiecksmatrix* ist.

Wir wandeln dadurch unser *schwierigeres* Problem in ein *einfach zu lösendes* Problem um.

Generell ist dies die Überlegung, die später zu Faktorisierungen führt. Es sollten die Probleme $M_1 x_1 = b$ bis $M_n x_n = x_{n-1}$, wobei $A = M_1 \cdots M_n$ gilt, *einfach* zu lösen sein.

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Wir kennen drei Elementaroperationen: **Zeilenvertauschungen**, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Elementaroperationen (Zeilenvertauschungen)

Jede (Zeilen-)Elementaroperation lässt sich als **Linksmultiplikation** einer Elementarmatrix $(T_{\ell,k})$ mit A und b darstellen.

$T_{\ell,k}$ vertauscht die ℓ -te mit der k -ten Zeile.

$$T_{\ell,k} = (t_{\ell,k})_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i=j \wedge i \neq \ell \wedge k \neq j \\ 1 & , \text{ falls } i=\ell \wedge j=k \\ 1 & , \text{ falls } i=k \wedge j=\ell \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}$$

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, **Zeilenmultiplikationen** und Gauß-Scherungen.

Elementaroperationen (*Multiplikation mit einem Skalar*)

Jede (Zeilen-)Elementaroperation lässt sich als **Linksmultiplikation** einer Elementarmatrix $(D_\ell(\alpha))$ mit A und b darstellen.

$D_\ell(\alpha)$ multipliziert die ℓ -te Zeile mit α .

$$D_\ell(\alpha) = (d_\ell)_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i=j \wedge i \neq \ell \neq j \\ \alpha & , \text{ falls } i=\ell=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und **Gauß-Scherungen**.

Elementaroperationen (Zeilenaddition) — Gauß-Scherungen

Jede (Zeilen-)Elementaroperation lässt sich als **Linksmultiplikation** einer Elementarmatrix $(N_{\ell,k}(\alpha))$ mit A und b darstellen.

$N_{\ell,k}(\alpha)$ addiert das α -fache der ℓ -ten Zeile auf die k -te Zeile.

$$N_{\ell,k}(\alpha) = (n_{\ell,k})_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i=j \\ \alpha & , \text{ falls } i=\ell \wedge j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Idee

Statt für jedes b die Eliminationen nochmal durchzuführen ($\approx n^3$ Schritte) merken wir uns die Eliminationsmatrizen in einer Matrix M .

Wir kennen drei Elementaroperationen: Zeilenvertauschungen, Zeilenmultiplikationen und Gauß-Scherungen.

Idee

Statt für jedes b die Eliminationen nochmal durchzuführen ($\approx n^3$ Schritte) merken wir uns die Eliminationsmatrizen in einer Matrix M .

Aus Mathe ist ebenso bekannt, dass es zum Lösen von LGS (nahezu) nur Operationen der Zeilenaddition braucht. Beschränken wir uns auf diese Operationen, so erhalten wir eine besondere Form der Matrix M .

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit Gauß, kann man sich die „Faktoren α “ der Gauß-Scherungen in einer *linken unteren Dreiecksmatrix* L merken.

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit Gauß, kann man sich die „Faktoren α “ der Gauß-Scherungen in einer *linken unteren Dreiecksmatrix* L merken.

Lemma 2.1 (Inverse der Gauß-Scherung)

Für $N_{i,j}(\alpha)$ gilt:

$$N_{i,j}^{-1}(\alpha) = N_{i,j}(-\alpha)$$

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit Gauß, kann man sich die „Faktoren α “ der Gauß-Scherungen in einer *linken unteren Dreiecksmatrix* L merken.

Lemma 2.1 (Inverse der Gauß-Scherung)

Für $N_{i,j}(\alpha)$ gilt:

$$N_{i,j}^{-1}(\alpha) = N_{i,j}(-\alpha)$$

Lemma 2.2 (LR-Faktorisierung)

Viele Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann durch maximal $s = \sum_{i=0}^{n-1} i$ Gauß-Scherungen $N_{l_j, k_j}(\alpha_j)$ in die Form

$$A = L \cdot R = \underbrace{N_{l_1, k_1}(-\alpha_1) \cdots N_{l_s, k_s}(-\alpha_s)}_{=: L} \cdot \underbrace{N_{l_s, k_s}(\alpha_s) \cdots N_{l_1, k_1}(\alpha_1)}_{=: R} \cdot A,$$

wobei L eine *linke untere* und R eine *rechte obere Dreiecksmatrix* ist, gebracht werden.

Algorithmus 2.1 — LR-Faktorisierung *ohne* Pivotisierung

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ausgabe : L, R , so dass $LR = A$

(1) $L \leftarrow \mathbb{1}_n$

(2) $R \leftarrow A$

(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

(4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** n **do**

(5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

(6) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$ /* Aufpassen, $R_{j,k:n}$ ist ein Vektor */

(7) **end for**

(8) **end for**

Berechne die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{I}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
- (4-7) | ...
- (8) **end for**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
- (4-7) | ...
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

```
(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 2$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 2$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 2$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} =$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $3$  do                                //  $k = 1$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to  $4$  do                    //  $j = 2$ 
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{2,1} \cdot R_{1,1:4}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 2$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 20 & 17 & 15 & 11 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} = (20, 17, 15, 11)^T - 5 \cdot (4, 3, 2, 1)^T$$

```

(1) L ← 14
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 3 do           // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 4 do   // j = 2
(5)     Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(6)     Rj,k:4 ← Rj,k:4 - Lj,k · Rk,k:4
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{20}{4} = 5$$

$$R_{2,1:4} = (0, 2, 5, 6)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 2$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 3$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 3$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} =$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} = R_{3,1:4} - L_{3,1} \cdot R_{1,1:4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $3$  do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $4$  do //  $j = 3$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 16 & 18 & 26 & 24 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} = (16, 18, 26, 24)^T - 4 \cdot (4, 3, 2, 1)^T$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 3$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = \frac{R_{3,1}}{R_{1,1}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$R_{3,1:4} = (0, 6, 18, 20)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} =$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} = R_{4,1:4} - L_{4,1} \cdot R_{1,1:4}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 4 & 7 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} = (4, 7, 18, 18)^T - 1 \cdot (4, 3, 2, 1)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = \frac{R_{4,1}}{R_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$R_{4,1:4} = (0, 4, 16, 17)^T$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

```
(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 2$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 3$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} =$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 3$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{3,2} \cdot R_{2,2:4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 18 & 20 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} = (6, 18, 20)^T - 3 \cdot (2, 5, 6)^T$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 3$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$R_{3,2:4} = (0, 3, 2)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 2$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} =$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} = R_{4,2:4} - L_{4,2} \cdot R_{2,2:4}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} = (4, 16, 17)^T - 2 \cdot (2, 5, 6)^T$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = \frac{R_{4,2}}{R_{2,2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$R_{4,2:4} = (0, 6, 5)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $3$  do //  $k = 2$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $4$  do //  $j = 4$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

```
(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 3$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} =$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{4,3} \cdot R_{3,3:4}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 3$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} = (6, 5)^T - 2 \cdot (3, 2)^T$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do** // $k = 3$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 4 **do** // $j = 4$
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$R_{4,3:4} = (0, 1)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)      $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)      $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   end for
(8) end for
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

Aufgabe 1 – LR-Zerlegung für tridiagonale Matrizen

- a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung für die nachfolgende tridiagonale Matrix (ohne Pivotsuche)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow B$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
- (4-7) | ...
- (8) **end for**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow B$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
- (4-7) | ...
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow B$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 2$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 2$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $3$  do //  $k = 1$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $4$  do //  $j = 2$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} =$$

```

(1) L ← 14
(2) R ← B
(3) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(5)     Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(6)     Rj,k:4 ← Rj,k:4 - Lj,k · Rk,k:4
(7)   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{2,1} \cdot R_{1,1:4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 2$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} = (-3, -8, 3, 0)^T + 3 \cdot (1, 2, 0, 0)^T$$

```

(1) L ← 14
(2) R ← B
(3) for k ← 1 to 3 do           // k = 1
    for j ← k + 1 to 4 do     // j = 2
        Lj,k ← Rj,k/Rk,k
        Rj,k:4 ← Rj,k:4 - Lj,k · Rk,k:4
    end for
(7) end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$R_{2,1:4} = (0, -2, 3, 0)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 2$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do                    //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

$$R_{3,1:4} = R_{3,1:4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do                    //  $j = 3$ 
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)     | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do                    //  $j = 4$ 
(5)     |     |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)     |     |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 1$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow B$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 2$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} =$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{3,2} \cdot R_{2,2:4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} = (-8, 13, 3)^T - 4 \cdot (-2, 3, 0)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$R_{3,2:4} = (0, 1, 3)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 3$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 2$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   |   | end for
(8)   | end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit Nullen?

Gilt $R_{j,k} = 0$, so ist $L_{j,k} = 0$ und $R_{j,k:4}$ bleibt unverändert!

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 2$ 
(4)     | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do                    //  $j = 4$ 
(5)     |     |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)     |     |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 2$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow B$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5) |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} =$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{4,3} \cdot R_{3,3:4}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} = (-2, -4)^T + 2 \cdot (1, 3)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4)     for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5)          $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k} / R_{k,k}$ 
(6)          $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)     end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$R_{4,3:4} = (0, 2)^T$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do //  $k = 3$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do //  $j = 4$ 
(5) |   |    $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6) |   |    $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7) |   end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $R \leftarrow B$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do                                //  $k = 3$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 4 do
(5)   |   |  $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ 
(6)   |   |  $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$ 
(7)   | end for
(8) end for
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $R \leftarrow B$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**
- (5) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$
- (6) $R_{j,k:4} \leftarrow R_{j,k:4} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:4}$
- (7) **end for**
- (8) **end for**

- a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung für die nachfolgende tridiagonale Matrix (ohne Pivotsuche)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_R.$$

b) Gegeben sei nun eine allgemeine tridiagonale $n \times n$ -Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Welche Struktur haben L und R ?

c) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A .

b) Gegeben sei nun eine allgemeine tridiagonale $n \times n$ -Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Welche Struktur haben L und R ?

- c) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A .
- d) Wie groß ist jeweils der Aufwand zum Lösen der beiden Teilprobleme $Ly = b$ und $Rx = y$?

***Rekapitulation* –
Matrixzerlegungen (II)**

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1

Wir faktorisieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem eben gelernten Algorithmus.

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1

Wir faktorisieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem eben gelernten Algorithmus. Nach dem zweiten Eliminationsschritt erhalten wir ein L und R von

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & ? & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Betrachte hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1

Wir faktorisieren die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mit dem eben gelernten Algorithmus. Nach dem zweiten Eliminationsschritt erhalten wir ein L und R von

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & ? & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es müsste im nächsten Schritt durch 0 dividiert werden!

Beispiel 2.2

Wir betrachten nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 + \varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

für kleines ε . Offensichtlich erhalten wir für $\varepsilon = 0$ Beispiel 2.1

Beispiel 2.2

Wir betrachten nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 + \varepsilon & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

für kleines ε . Es ergibt sich eine LR-Zerlegung von

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - 6/\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - 6/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = (1, 0, 0)^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung.

Beispiel 2.2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & 4 - 6/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = (1, 0, 0)^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit¹, so gilt $4 - 6/\varepsilon \approx -6/\varepsilon$.

¹sehr klein, aber darstellbar

Beispiel 2.2

$$\tilde{L} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & -6/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = (1, 0, 0)^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit, so gilt $4 - 6/\varepsilon \approx -6/\varepsilon$. Lösen wir nun $Ax = b$ mit der ungenauen LR-Zerlegung, sowie mit der exakten Zerlegung, so erhalten wir

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 11/2 - 2/3\varepsilon \\ -2 \\ 2/3\varepsilon - 2/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11/2 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \neq x = \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon-7}{2\varepsilon-3} \\ \frac{2}{2\varepsilon-3} \\ \frac{-2\varepsilon+2}{2\varepsilon-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.2

$$\tilde{L} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & -6/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = (1, 0, 0)^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit, so gilt $4 - 6/\varepsilon \approx -6/\varepsilon$. Lösen wir nun $Ax = b$ mit der ungenauen LR-Zerlegung, sowie mit der exakten Zerlegung, so erhalten wir

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 11/2 - 2/3\varepsilon \\ -2 \\ 2/3\varepsilon - 2/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11/2 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \neq x = \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon-7}{2\varepsilon-3} \\ \frac{2}{2\varepsilon-3} \\ \frac{-2\varepsilon+2}{2\varepsilon-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Obwohl \tilde{L} und \tilde{R} relativ nahe bei L und R liegen ist $\tilde{L}\tilde{R}$ weit von LR entfernt, die berechnete Lösung \tilde{x} wertlos.

Beispiel 2.2

$$\tilde{L} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 0 & -6/\varepsilon \end{pmatrix}$$

Angenommen $b = (1, 0, 0)^T$ und wir lösen $Ax = b$ mittels der LR-Faktorisierung. Sei nun ε auf Maschinengenauigkeit, so gilt $4 - 6/\varepsilon \approx -6/\varepsilon$. Lösen wir nun $Ax = b$ mit der ungenauen LR-Zerlegung, sowie mit der exakten Zerlegung, so erhalten wir

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 11/2 - 2/3\varepsilon \\ -2 \\ 2/3\varepsilon - 2/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 11/2 \\ -2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \neq x = \begin{pmatrix} \frac{4\varepsilon-7}{2\varepsilon-3} \\ \frac{2}{2\varepsilon-3} \\ \frac{-2\varepsilon+2}{2\varepsilon-3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Obwohl \tilde{L} und \tilde{R} relativ nahe bei L und R liegen ist $\tilde{L}\tilde{R}$ weit von LR entfernt, die berechnete Lösung \tilde{x} wertlos. **Der Algorithmus ist numerisch instabil.**

Wann treten diese Probleme auf?

Wann immer $R_{kk} \ll R_{jk}$ gilt, und somit L_{jk} groß ist.

Wann treten diese Probleme auf?

Wann immer $R_{kk} \ll R_{jk}$ gilt, und somit L_{jk} groß ist.

Lösungsvorschlag

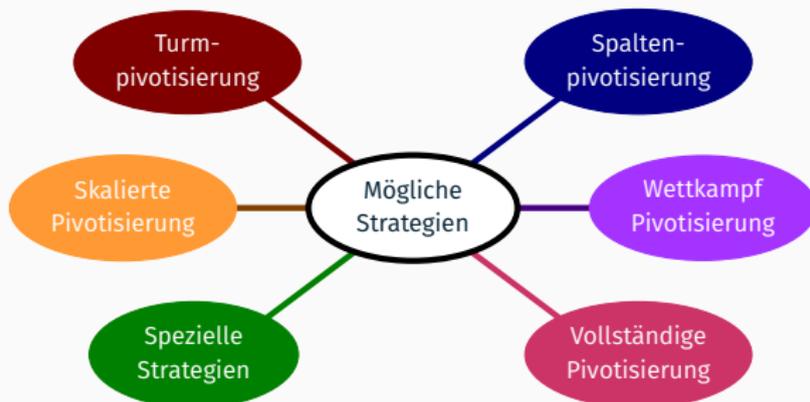
Verhindere das Problem durch geeignet gewählte Permutationen!

Wann treten diese Probleme auf?

Wann immer $R_{kk} \ll R_{jk}$ gilt, und somit L_{jk} groß ist.

Lösungsvorschlag

Verhindere das Problem durch geeignet gewählte Permutationen!



Strategie — *Spaltenpivotisierung*

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

Strategie — Spaltenpivotisierung

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix A

Faktoriere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun in die Matrizen L , R und P , so dass

$$A = PLR$$

und für L , R , P gilt, dass ...

Strategie — Spaltenpivotisierung

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix A

Faktoriere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun in die Matrizen L , R und P , so dass

$$A = PLR$$

und für L , R , P gilt, dass ...

... $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *untere, linke* Dreiecksmatrix ist.

Strategie — Spaltenpivotisierung

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix A

Faktoriere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun in die Matrizen L , R und P , so dass

$$A = PLR$$

und für L , R , P gilt, dass ...

- ... $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *untere, linke* Dreiecksmatrix ist.
- ... $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *obere, rechte* Dreiecksmatrix ist.

Strategie — Spaltenpivotisierung

Bringe das jeweils in der betrachtenden (Rest-)spalte *betragsmäßig größte* Element durch **Zeilenvertauschungen** auf die Diagonale.

PLR-Faktorisierung einer Matrix A

Faktoriere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nun in die Matrizen L , R und P , so dass

$$A = PLR$$

und für L , R , P gilt, dass ...

- ... $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *untere, linke* Dreiecksmatrix ist.
- ... $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *obere, rechte* Dreiecksmatrix ist.
- ... $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Kombination aus *Permutationsmatrizen* ist.

Satz 2.3 (Existenz der PLR-Zerlegung)

Für jede **quadratische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren Matrizen P, L, R wie vorhin, so dass

$$A = PLR$$

gilt. In anderen Worten: Eine jede quadratische Matrix besitzt eine *PLR*-Zerlegung.

Satz 2.3 (Existenz der PLR-Zerlegung)

Für jede **quadratische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren Matrizen P, L, R wie vorhin, so dass

$$A = PLR$$

gilt. In anderen Worten: Eine jede quadratische Matrix besitzt eine *PLR*-Zerlegung.

Problem?

Was passiert wenn eine ganze Spalte nur aus Nullen besteht? Warum stellt dies kein Problem für den Algorithmus dar?

Berechne die *PLR*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

```

(1)  $P \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(3)  $R \leftarrow A$ 
(4) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(5-12) | ...
(13) end for
(14)  $P \leftarrow P^T$ 

```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $P \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (3) $R \leftarrow A$
- (4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
- (5-12) | ...
- (13) **end for**
- (14) $P \leftarrow P^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $P \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (2) $L \leftarrow \mathbb{1}_4$
- (3) $R \leftarrow A$
- (4) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 3 **do**
- (5-12) | ...
- (13) **end for**
- (14) $P \leftarrow P^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```
(1)  $P \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(2)  $L \leftarrow \mathbb{1}_4$ 
(3)  $R \leftarrow A$ 
(4) for  $k \leftarrow 1$  to 3 do
(5-12) | ...
(13) end for
(14)  $P \leftarrow P^T$ 
```

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT
  
```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1 // n.z.t.
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,R:4 ↔ Ri,R:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} =$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} = R_{2,1:4} - L_{2,1} \cdot R_{1,1:4}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} = (2, 1, 0, 0)^T - 1/5 \cdot (10, 20, 5, 0)^T$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}} = \frac{2}{10} = 1/5$$

$$R_{2,1:4} = (0, -3, -1, 0)^T$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 2
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 2
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,1} = 0$$

$$R_{3,1:4} = R_{3,1:4}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = 0$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,R:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,1} = 0$$

$$R_{4,1:4} = R_{4,1:4}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 1
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...

(4) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**

(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{l \geq k} |R_{l,k}|$

(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$

(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

(9) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**

(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

(12) **end for**

(13) **end for**

(14) $P \leftarrow P^T$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do
(10)    | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT
  
```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT
  
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,R:4 ↔ Ri,R:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   | end for
(13)  | end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,R:4 ↔ Ri,R:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,R:4 ↔ Ri,R:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} =$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} = R_{3,2:4} - L_{3,2} \cdot R_{2,2:4}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} = (-3, -1, 0)^T + 1/2 \cdot (6, 4, 8)^T$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{3,2} = \frac{R_{3,2}}{R_{2,2}} = \frac{-3}{6} = -1/2$$

$$R_{3,2:4} = (0, 1, 4)^T$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 3
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = 0$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,2} = 0$$

$$R_{4,2:4} = R_{4,2:4}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,R:4 ↔ Ri,R:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 2
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 3
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT
  
```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...

(4) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**

(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{l \geq k} |R_{l,k}|$

(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$

(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

(9) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**

(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

(11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

(12) **end for**

(13) **end for**

(14) $P \leftarrow P^T$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...

```

(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k|
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}}$$

(1-3) ...

```

(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,R:4 ↔ Ri,R:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10}$$

(1-3) ...

```

(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} =$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} = R_{4,3:4} - L_{4,3} \cdot R_{3,3:4}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)   end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} = (1, 4)^T - 1/10 \cdot (10, 20)^T$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT

```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_{4,3} = \frac{R_{4,3}}{R_{3,3}} = \frac{1}{10} = 1/10$$

$$R_{4,3:4} = (0, 2)^T$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   Pk ↔ Pi
(7)   Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   for j ← k + 1 to 4 do // j = 4
(10)    Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)    Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  end for
(13) end for
(14) P ← PT
    
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do // k = 3
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT
  
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...

(4) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{l \geq k} |R_{l,k}|$ // $i = 4$ (6) $P_k \longleftrightarrow P_i$ (7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$ (8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$ (9) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**(10) $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$ (11) $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$ (12) **end for**(13) **end for**(14) $P \leftarrow P^T$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

(1-3) ...
(4) for k ← 1 to 3 do
(5)   | i ← argmaxl ≥ k |Rl,k| // i = 4
(6)   | Pk ↔ Pi
(7)   | Rk,k:4 ↔ Ri,k:4
(8)   | Lk,1:k-1 ↔ Li,1:k-1
(9)   | for j ← k + 1 to 4 do
(10)  |   | Lj,k ← Rj,k/Rk,k
(11)  |   | Rj,k:n ← Rj,k:n - Lj,k · Rk,k:n
(12)  |   end for
(13) end for
(14) P ← PT
  
```

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1-3) ...

(4) **for** $k \leftarrow 1$ to 3 **do**

(5) $i \leftarrow \operatorname{argmax}_{l \geq k} |R_{l,k}|$ // $i = 4$

(6) $P_k \longleftrightarrow P_i$

(7) $R_{k,k:4} \longleftrightarrow R_{i,k:4}$

(8) $L_{k,1:k-1} \longleftrightarrow L_{i,1:k-1}$

(9) **for** $j \leftarrow k + 1$ to 4 **do**

(10) | $L_{j,k} \leftarrow R_{j,k}/R_{k,k}$

(11) | $R_{j,k:n} \leftarrow R_{j,k:n} - L_{j,k} \cdot R_{k,k:n}$

(12) | **end for**

(13) **end for**

(14) $P \leftarrow P^T$

Berechne die *PLR*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_P \cdot \frac{1}{10} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_R$$

***Rekapitulation* –
Matrixzerlegungen (III)**

Kondition und Konditionszahl

Die **Kondition** eines Problems beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten.

Kondition und Konditionszahl

Die **Kondition** eines Problems beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten.

Die **Konditionszahl** stellt ein Maß für die Kondition dar. Sie beschreibt den Faktor, um den der Eingangsfehler im ungünstigsten Fall verstärkt wird.

Kondition und Konditionszahl

Die **Kondition** eines Problems beschreibt die Abhängigkeit der Lösung eines Problems von der Störung der Eingangsdaten.

Die **Konditionszahl** stellt ein Maß für die Kondition dar. Sie beschreibt den Faktor, um den der Eingangsfehler im ungünstigsten Fall verstärkt wird. Sie ist *unabhängig* von konkreten Lösungsverfahren, aber *abhängig vom mathematischen Problem*.

Man kann nun zeigen, dass man das zu lösende Problem $Ax = b$ mit einer LR-Zerlegung **drastisch** verschlechtern kann.

Beispiel 2.3

Betrachte die Matrix

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j \vee j = n \\ -1 & , \text{ falls } j < i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für ihre Konditionszahl gilt $\kappa_1(A) = n$. Man kann zeigen, dass für ihre LR-Zerlegung gilt, dass $\kappa_1(R) = 2^n - 1 \gg \kappa_1(A)$.

Man kann nun zeigen, dass man das zu lösende Problem $Ax = b$ mit einer LR-Zerlegung **drastisch** verschlechtern kann.

Beispiel 2.3

Betrachte die Matrix

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j \vee j = n \\ -1 & , \text{ falls } j < i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für ihre Konditionszahl gilt $\kappa_1(A) = n$. Man kann zeigen, dass für ihre LR-Zerlegung gilt, dass $\kappa_1(R) = 2^n - 1 \gg \kappa_1(A)$. **Selbst eine Pivotsuche hilft hier nicht!**

Ebenso kann man eine *Fehlerwachstumsrate* durch

$$\rho = \frac{\max_{i,j} |R_{i,j}|}{\max_{i,j} |A_{i,j}|}$$

definieren. Man kann zeigen, dass für eine LR-Zerlegung *mit Pivotsuche*

$$\rho \leq 2^{m-1}$$

gilt. (Siehe hierzu *Beispiel 2.3*)

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

... sie sind *einfach* zu invertieren, ähnlich wie bei den *Permutationsmatrizen*:

$$Q^{-1} = Q^T$$

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

... sie sind *einfach* zu invertieren, ähnlich wie bei den *Permutationsmatrizen*:

$$Q^{-1} = Q^T$$

... die Kondition¹ einer Matrix ändert sich durch Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix nicht, es gilt

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q \cdot A) \quad \text{für alle invertierbaren Matrizen.}$$

¹Die 2-Kondition κ_2 zumindest ...

Wir überlegen uns stattdessen eine andere Möglichkeit ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Ideal wären **orthogonale Matrizen** anstelle der linken unteren Dreiecksmatrizen, denn ...

... sie sind *einfach* zu invertieren, ähnlich wie bei den *Permutationsmatrizen*:

$$Q^{-1} = Q^T$$

... die Kondition¹ einer Matrix ändert sich durch Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix nicht, es gilt

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q \cdot A) \quad \text{für alle invertierbaren Matrizen.}$$

Ziel

Zerlege eine Matrix $A = Q \cdot R$ in eine Matrix Q und R , wobei Q eine *orthogonale* und R eine *rechte, obere Dreiecksmatrix* ist.

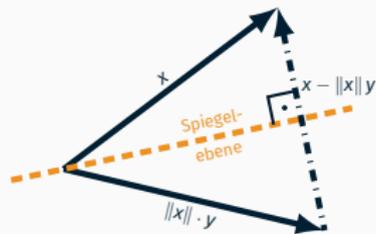
¹Die 2-Kondition κ_2 zumindest ...

Idee (Householder)

Bei den Householderspiegelungen erzeugt man über sinnvoll gewählte Reflektionsmatrizen Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.

Idee (Householder)

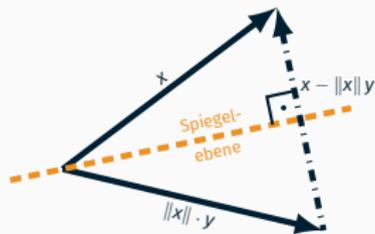
Bei den Householderspiegelungen erzeugt man über sinnvoll gewählte Reflektionsmatrizen Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.



Konstruktion eines Spiegelvektors
von x auf $\|x\| y$ mit $\|y\| = 1$

Idee (Householder)

Bei den Householderspiegelungen erzeugt man über sinnvoll gewählte Reflektionsmatrizen Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen.



Konstruktion eines Spiegelvektors
von x auf $\|x\| y$ mit $\|y\| = 1$

Spiegelungen an einer Ebene orthogonal zu einem *Einheitsnormalenvektor* v werden durch die Matrix

$$H(v) = E_n - 2 \cdot vv^T$$

beschrieben.

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Der Skizze entnehmen wir, dass dies eine zu $x - \|x\|y$ orthogonale Hyper-ebene ist.

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Der Skizze entnehmen wir, dass dies eine zu $x - \|x\|y$ orthogonale Hyper-ebene ist.

Mit $u = x - \|x\|y$ und $v = u/\|u\|$ erhält man dann

$$(E_n - 2vv^T)x = \|x\|y.$$

Wie wählen wir die Spiegelung?

Mit einem gegebenen Vektor x wollen wir dann eine Spiegelung finden, welche x in eine parallele Richtung eines Einheitsvektors y spiegelt.

Der Skizze entnehmen wir, dass dies eine zu $x - \|x\| y$ orthogonale Hyper-ebene ist.

Mit $u = x - \|x\| y$ und $v = u/\|u\|$ erhält man dann

$$(E_n - 2vv^T)x = \|x\| y.$$

Idee der Householderspiegelung

Wählen wir $y = \pm e_1$, wobei e_1 der erste Standardbasisvektor ist, so eliminieren wir alle Positionen von x bis auf die erste.

Definition 2.4 (Householderspiegelung)

Bezüglich eines gegebenen Vektors $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ heißt die Matrix

$$H = H(v) := E_n - 2 \cdot \frac{vv^T}{\|v\|_2^2}$$

Householder-Spiegelungsmatrix. Ferner sei $H(0) = E_n$.

Definition 2.4 (Householderspiegelung)

Bezüglich eines gegebenen Vektors $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ heißt die Matrix

$$H = H(v) := E_n - 2 \cdot \frac{vv^T}{\|v\|_2^2}$$

Householder-Spiegelungsmatrix. Ferner sei $H(0) = E_n$.

Satz 2.5 (Spiegelungsmatrizen)

Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist $H(v)$ symmetrisch und orthogonal, es gilt also

$$H^{-1} = H^T = H.$$

Algorithmus 2.3 — QR mit Householder-Spiegelungen

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ausgabe : Q, R , so dass $A = QR$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $\min(m, n - 1)$ **do**
- (4) $x \leftarrow R_{k:n,k}$
- (5) $e_1^k \leftarrow \left(1, 0, \dots, 0 \right)^T$ // Länge von e_1^k ist $n - k + 1$
- (6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- (7) $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{n-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- (8) $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array} \right)$
- (9) $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
- (10) $R \leftarrow H_k \cdot R$
- (11) **end for**

Komplexität (Householder)

Wir erkennen schnell, dass bei einer *effizienten Implementierung* insgesamt

$$\frac{2}{3} \cdot n^3 + \mathcal{O}(n^2) \quad \text{Additionen/Multiplikationen und}$$
$$n - 1 \quad \text{Wurzelberechnungen}$$

notwendig sind. Dies ist eine **klare Verschlechterung der Laufzeit** gegenüber den LR-Zerlegungen.

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Spiegelungen.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $\min(3, 3 - 1)$  do
(4-10) | ...
(11) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

```
(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $\min(3, 3 - 1)$  do
(4-10) | ...
(11) end for
```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 3 - 1)$ **do**
- (4) $x \leftarrow R_{k:3,k}$
- (5) $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$
- (6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- (7) $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- (8) $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array} \right)$
- (9) $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
- (10) $R \leftarrow H_k \cdot R$
- (11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
- (4) $x \leftarrow R_{k:3,k}$
- (5) $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$
- (6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- (7) $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- (8) $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array} \right)$
- (9) $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
- (10) $R \leftarrow H_k \cdot R$
- (11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // k = 1
- (4) $x \leftarrow R_{1:3,1}$
- (5) $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$
- (6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- (7) $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- (8) $H_1 \leftarrow H_1'$
- (9) $Q \leftarrow Q \cdot H_1$
- (10) $R \leftarrow H_1 \cdot R$
- (11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do                                //  $k = 1$ 
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do           //  $k = 1$ 
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{196}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do           // k = 1
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2}$$

```

(1) Q ← 1n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   x ← R1:3,1
(5)   e11 = ( 1, 0, 0 )T
(6)   u ← x - ||x||2 · e1k
(7)   H1' ← 13 - 2 ·  $\frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)   H1 ← H1'
(9)   Q ← Q · H1
(10)  R ← H1 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2, 6, -4 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{56}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $2$  do //  $k = 1$ 
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for
  
```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12, 6, -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2, 6, -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\sqrt{56}^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   x ← R_{1:3,1}
(5)   e_1^1 = ( 1, 0, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_1 ← 1_3 - 2 · \frac{uu^T}{||u||_2^2}
(8)   H_1 ← H'_1
(9)   Q ← Q · H_1
(10)  R ← H_1 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{56}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   x ← R_{1:3,1}
(5)   e_1^1 = ( 1, 0, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_1 ← 1_3 - 2 · (uu^T) / (||u||_2^2)
(8)   H_1 ← H'_1
(9)   Q ← Q · H_1
(10)  R ← H_1 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   x ← R_{1:3,1}
(5)   e_1^1 = ( 1, 0, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_1 ← 1_3 - 2 · (uu^T) / ||u||_2^2
(8)   H_1 ← H'_1
(9)   Q ← Q · H_1
(10)  R ← H_1 · R
(11) end for
  
```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H'_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   x ← R_{1:3,1}
(5)   e_1^1 = ( 1, 0, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_1 ← 1_3 - 2 · (uu^T) / (||u||_2^2)
(8)   H_1 ← H'_1
(9)   Q ← Q · H_1
(10)  R ← H_1 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   x ← R_{1:3,1}
(5)   e_1^1 = ( 1, 0, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_1 ← 1_3 - 2 · (uu^T) / ||u||_2^2
(8)   H_1 ← H'_1
(9)   Q ← Q · H_1
(10)  R ← H_1 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   x ← R_{1:3,1}
(5)   e_1^1 = ( 1, 0, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_1 ← 1_3 - 2 · (uu^T) / ||u||_2^2
(8)   H_1 ← H'_1
(9)   Q ← Q · H_1
(10)  R ← H_1 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 14$$

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = \sqrt{56}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)    $x \leftarrow R_{1:3,1}$ 
(5)    $e_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H_1' \leftarrow \mathbb{1}_3 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_1 \leftarrow H_1'$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_1$ 
(10)   $R \leftarrow H_1 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ to 2 **do**
- (4) $x \leftarrow R_{k:3,k}$
- (5) $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$
- (6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- (7) $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- (8) $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array} \right)$
- (9) $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
- (10) $R \leftarrow H_k \cdot R$
- (11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{30625}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 2$ 
(4)    $x \leftarrow R_{2:3,2}$ 
(5)    $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 
(6)    $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
(7)    $H'_2 \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)    $H_2 \leftarrow \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
(9)    $Q \leftarrow Q \cdot H_2$ 
(10)   $R \leftarrow H_2 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{30625}$$

```

(1) Q ← 1n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R2:3,2
(5)   e12 = ( 1, 0 )T
(6)   u ← x - ||x||2 · e1k
(7)   H'2 ← 12 - 2 ·  $\frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)   H2 ←  $\left( \begin{array}{c|c} 1_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
(9)   Q ← Q · H2
(10)  R ← H2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-49)^2 + 168^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
    (4) x ← R_{2:3,2}
    (5) e_1^2 = ( 1, 0 )^T
    (6) u ← x - ||x||_2 · e_1^k
    (7) H'_2 ← 1_2 - 2 · (uu^T / ||u||_2^2)
    (8) H_2 ← ( 1_1 | 0
                0 | H'_2 )
    (9) Q ← Q · H_2
    (10) R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{30625}$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 2$ 
    (4)  $x \leftarrow R_{2:3,2}$ 
    (5)  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 
    (6)  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
    (7)  $H'_2 \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
    (8)  $H_2 \leftarrow \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
    (9)  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$ 
    (10)  $R \leftarrow H_2 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 2$ 
    (4)  $x \leftarrow R_{2:3,2}$ 
    (5)  $e_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ 
    (6)  $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$ 
    (7)  $H'_2 \leftarrow \mathbb{1}_2 - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
    (8)  $H_2 \leftarrow \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
    (9)  $Q \leftarrow Q \cdot H_2$ 
    (10)  $R \leftarrow H_2 \cdot R$ 
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{(-224)^2 + 168^2}$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - \|x\|_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← 1_2 - 2 · \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}
(8)   H_2 ← \left( \begin{array}{c|c} 1_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T$$

$$\|u\|_2 = 280$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← 1_2 - 2 · \frac{uu^T}{||u||_2^2}
(8)   H_2 ← ( \frac{1_1}{0} | \frac{0}{H'_2} )
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← 1_2 - 2 · \frac{uu^T}{||u||_2^2}
(8)   H_2 ← ( \frac{1_1}{0} | \frac{0}{H'_2} )
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← 1_2 - 2 · (uu^T) / ||u||_2^2
(8)   H_2 ← ( 1_1 | 0
              0 | H'_2 )
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{uu^T}{280^2}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← 1_2 - 2 · \frac{uu^T}{||u||_2^2}
(8)   H_2 ← ( \frac{1_1}{0} | \frac{0}{H'_2} )
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   x ← R2:3,2
(5)   e12 = ( 1, 0 )T
(6)   u ← x - ||x||2 · e1k
(7)   H'2 ← 12 - 2 ·  $\frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)   H2 ←  $\left( \begin{array}{c|c} 1_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
(9)   Q ← Q · H2
(10)  R ← H2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H'_2 = \begin{pmatrix} 7/25 & -24/25 \\ -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← 1_2 - 2 · (uu^T) / ||u||_2^2
(8)   H_2 ← ( 1_1 | 0
              0 | H'_2 )
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   x ← R2:3,2
(5)   e12 = ( 1, 0 )T
(6)   u ← x - ||x||2 · e1k
(7)   H'2 ← 12 - 2 ·  $\frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)   H2 ←  $\left( \begin{array}{c|c} 1_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
(9)   Q ← Q · H2
(10)  R ← H2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 3/7 & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & 6/7 \\ -2/7 & 6/7 & 3/7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I_n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R_{2:3,2}
(5)   e_1^2 = ( 1, 0 )^T
(6)   u ← x - ||x||_2 · e_1^k
(7)   H'_2 ← I_2 - 2 · (uu^T / ||u||_2^2)
(8)   H_2 ← ( I_1 | 0
              0 | H'_2 )
(9)   Q ← Q · H_2
(10)  R ← H_2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & -158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -49 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|x\|_2 = 175$$

$$u = \begin{pmatrix} -224 & 168 \end{pmatrix}^T \quad \|u\|_2 = 280$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/25 & -24/25 \\ 0 & -24/25 & -7/25 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← 1n
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   x ← R2:3,2
(5)   e12 = ( 1, 0 )T
(6)   u ← x - ||x||2 · e1k
(7)   H'2 ← 12 - 2 ·  $\frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$ 
(8)   H2 ←  $\left( \begin{array}{c|c} 1_1 & 0 \\ \hline 0 & H'_2 \end{array} \right)$ 
(9)   Q ← Q · H2
(10)  R ← H2 · R
(11) end for

```

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & -158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

(2) $R \leftarrow A$

(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**

(4) $x \leftarrow R_{k:3,k}$

(5) $e_1^k = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}^T$

(6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$

(7) $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$

(8) $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array} \right)$

(9) $Q \leftarrow Q \cdot H_k$

(10) $R \leftarrow H_k \cdot R$

(11) **end for**

$$Q = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & -158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do**
- (4) $x \leftarrow R_{k:3,k}$
- (5) $e_1^k = \left(1, 0, \dots, 0 \right)^T$
- (6) $u \leftarrow x - \|x\|_2 \cdot e_1^k$
- (7) $H'_k \leftarrow \mathbb{1}_{3-k+1} - 2 \cdot \frac{uu^T}{\|u\|_2^2}$
- (8) $H_k \leftarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & H'_k \end{array} \right)$
- (9) $Q \leftarrow Q \cdot H_k$
- (10) $R \leftarrow H_k \cdot R$
- (11) **end for**

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Spiegelungen.

Lösung:

$$A = \underbrace{\frac{1}{175} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 69 & -58 \\ 75 & -158 & 6 \\ -50 & -30 & -165 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}}_R$$

Definition 2.6 (Givensrotation)

Die Matrix

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni J_{i,j}(c, s) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, k \neq i, k \neq j \\ c = \cos(\varphi) & \text{für } k = l = j, k = l = i \\ s = \sin(\varphi) & \text{für } k = j, l = i \\ -s = -\sin(\varphi) & \text{für } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ und $c^2 + s^2 = 1$ heißt Givensrotation. Sie beschreibt eine Rotation um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn in der (i, j) -Ebene. Deswegen bezeichnet man sie – mit $c = \cos(\varphi)$ und $s = \sin(\varphi)$ – auch oft als $J_{i,j}(\varphi)$.

Definition 2.6 (Givensrotation)

Die Matrix

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni J_{i,j}(c, s) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l, k \neq i, k \neq j \\ c = \cos(\varphi) & \text{für } k = l = j, k = l = i \\ s = \sin(\varphi) & \text{für } k = j, l = i \\ -s = -\sin(\varphi) & \text{für } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ und $c^2 + s^2 = 1$ heißt Givensrotation. Man bezeichnet sie – mit $c = \cos(\varphi)$ und $s = \sin(\varphi)$ – auch oft als $J_{i,j}(\varphi)$.

Lemma 2.7

Die Givensrotationen sind orthogonal und es gilt:

$$J_{i,j}^{-1}(\varphi) = J_{i,j}(-\varphi) = J_{i,j}^T(\varphi)$$

Man kann den Algorithmus zur QR-Zerlegung nun mit einem einfachen 2×2 -Beispiel motivieren. Angenommen wir haben eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

welche wir auf obere Dreiecksform durch Multiplikation mit der Givensrotation im \mathbb{R}^2 bringen wollen.

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c, s) \cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c, s) \cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Äquivalent ist eine Forderung von $s\alpha = -c\gamma$.

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c, s) \cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Äquivalent ist eine Forderung von $s\alpha = -c\gamma$.

Mit der Bedingung an J ergibt sich dann für $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$ eine Lösung von

$$c(\alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad \text{und} \quad s(\alpha, \gamma) = \frac{-\text{sgn}(\alpha) \cdot \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Wir müssen c und s also so wählen, dass

$$J(c, s) \cdot A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ s\alpha + c\gamma & * \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Äquivalent ist eine Forderung von $s\alpha = -c\gamma$.

Mit der Bedingung an J ergibt sich dann für $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$ eine Lösung von

$$c(\alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad \text{und} \quad s(\alpha, \gamma) = \frac{-\operatorname{sgn}(\alpha)^2 \cdot \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

²Hierbei ist $\operatorname{sgn}(x)$ definiert als $+1$ für $x \geq 0$ und -1 sonst.

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c, s)$ mit A **nur** die i -te und j -te Zeile von A betrifft.

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c, s)$ mit A **nur** die i -te und j -te Zeile von A betrifft.

Idee

Beim Durchlaufen der Spalten, eliminieren wir jeden Eintrag $a_{ij} \neq 0$, mit $i > j$, durch eine ebensolche Givensrotation im \mathbb{R}^n .

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c, s)$ mit A **nur** die i -te und j -te Zeile von A betrifft.

Idee

Beim Durchlaufen der Spalten, eliminieren wir jeden Eintrag $a_{ij} \neq 0$, mit $i > j$, durch eine ebensolche Givensrotation im \mathbb{R}^n . Für c, s übernimmt a_{ij} die Rolle von α und a_{ij} die Rolle von γ .

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen folgt nach ebendiesem Prinzip. Man erkennt schnell, dass das Produkt von $J_{i,j}(c, s)$ mit A **nur** die i -te und j -te Zeile von A betrifft.

Idee

Beim Durchlaufen der Spalten, eliminieren wir jeden Eintrag $a_{ij} \neq 0$, mit $i > j$, durch eine ebensolche Givensrotation im \mathbb{R}^n . Für c, s übernimmt a_{jj} die Rolle von α und a_{ij} die Rolle von γ . Es gilt dann:

$$c = \frac{\operatorname{sgn}(a_{jj}) \cdot a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \quad \text{und} \quad s = \frac{-\operatorname{sgn}(a_{jj}) \cdot a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}}$$

Algorithmus 2.4 – QR-Faktorisierung *mit* Givens-Rotationen

Eingabe : Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ausgabe : Q, R , so dass $A = QR$

(1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_n$

(2) $R \leftarrow A$

(3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $\min(m, n - 1)$ **do**

(4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** n **do**

(5) $J_{jk} \leftarrow \text{Givens-Rotation}(R, j, k)$

(6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$

(7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$

(8) **end for**

(9) **end for**

Komplexitäten im Vergleich (Householder vs. Givensrotation)

Man erkennt, dass obiger Algorithmus eine ungefähre Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, vorausgesetzt man implementiert *sinnvoll*.

Komplexitäten im Vergleich (Householder vs. Givensrotation)

Man erkennt, dass obiger Algorithmus eine ungefähre Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, vorausgesetzt man implementiert *sinnvoll*.

Bei einer allgemeinen $n \times n$ -Matrix braucht man allerdings $n \cdot (n-1)/2$ Givensrotationen, wohingegen man nur $n - 1$ Householder-Spiegelungen braucht.

Komplexitäten im Vergleich (Householder vs. Givensrotation)

Man erkennt, dass obiger Algorithmus eine ungefähre Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$ hat, vorausgesetzt man implementiert *sinnvoll*.

Bei einer allgemeinen $n \times n$ -Matrix braucht man allerdings $n \cdot (n-1)/2$ Givensrotationen, wohingegen man nur $n - 1$ Householder-Spiegelungen braucht.

Man möchte Givensrotationen vor allem bei dünnbesetzten Bandmatrizen verwenden, da sich hier ein Laufzeitgewinn feststellen lässt.

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $\min(3, 2)$  do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $3$  do
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** $\min(3, 2)$ **do**
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 3 **do**
- (5) $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$
- (6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
- (7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
- (8) **end for**
- (9) **end for**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $\min(3, 2)$  do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)   |   |  $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)   |   |  $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)   |   |  $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   | end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $2$  do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $3$  do //  $j = 2$ 
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $2$  do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $3$  do //  $j = 2$ 
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

```

(1) Q ← 13
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 2
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $2$  do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $3$  do //  $j = 2$ 
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$s = -\frac{\text{sgn}(a_{11}) \cdot a_{21}}{10}$$

```

(1) Q ← 13
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 2
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$s = -\frac{6}{10}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $2$  do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to  $3$  do //  $j = 2$ 
(5)   |   |  $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)   |   |  $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)   |   |  $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   | end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$s = -\frac{6}{10}$$

$$J_{21} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 2
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{8}{10}$$

$$s = -\frac{6}{10}$$

$$J_{21} = \begin{pmatrix} 8/10 & 6/10 & 0 \\ -6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 2
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8/10 & 6/10 & 0 \\ -6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 2
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do //  $j = 2$ 
(5)   |   |  $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)   |   |  $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)   |   |  $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   | end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot J_{21}^T = \mathbb{1}_3 \cdot J_{21}^T = J_{21}^T$$

```

(1) Q ← 13
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 2
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)   |   |  $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)   |   |  $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)   |   |  $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   | end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4) |   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do //  $j = 3$ 
(5) |   |  $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6) |   |  $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7) |   |  $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8) |   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do //  $j = 3$ 
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}}$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // $k = 1$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 3 **do** // $j = 3$
- (5) $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$
- (6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
- (7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
- (8) **end for**
- (9) **end for**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{26^2} = 26$$

$$s = -\frac{\text{sgn}(a_{11}) \cdot a_{31}}{26}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for
  
```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$s = -\frac{24}{26} = -12/13$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to  $2$  do //  $k = 1$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to  $3$  do //  $j = 3$ 
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$s = -\frac{24}{26} = -12/13$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{10}{26} = 5/13$$

$$s = -\frac{24}{26} = -12/13$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = J_{31} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 34/5 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot J_{31}^T$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 8/10 & -6/10 & 0 \\ 6/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 5/13 & 0 & 12/13 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 1
(4)   for j ← k + 1 to 3 do   // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do //  $k = 2$ 
(4)   for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do //  $j = 3$ 
(5)      $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)      $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)      $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2}}$$

$$\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

- (1) $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$
- (2) $R \leftarrow A$
- (3) **for** $k \leftarrow 1$ **to** 2 **do** // $k = 2$
- (4) **for** $j \leftarrow k + 1$ **to** 3 **do** // $j = 3$
- (5) $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$
- (6) $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$
- (7) $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$
- (8) **end for**
- (9) **end for**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{a_{22}^2 + a_{32}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$s = -\frac{\text{sgn}(a_{22}) \cdot a_{32}}{5}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for
  
```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$s = -\frac{(-4)}{5} = 4/5$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do   // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for
  
```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$s = -\frac{(-4)}{5} = 4/5$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{3}{5}$$

$$s = -\frac{(-4)}{5} = 4/5$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$R = J_{32} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do   // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 3 & -13/5 \\ 0 & -4 & -16/5 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix} \cdot J_{32}^T$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 4/13 & -3/5 & -48/65 \\ 3/13 & 4/5 & -36/65 \\ 12/13 & 0 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$J_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do           // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do   // j = 3
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do // k = 2
(4)   for j ← k + 1 to 3 do
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for

```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

```
(1) Q ← I3
(2) R ← A
(3) for k ← 1 to 2 do
(4)   for j ← k + 1 to 3 do
(5)     Jjk ← GivRot(R, j, k)
(6)     R ← Jjk · R
(7)     Q ← Q · JjkT
(8)   end for
(9) end for
```

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

```

(1)  $Q \leftarrow \mathbb{1}_3$ 
(2)  $R \leftarrow A$ 
(3) for  $k \leftarrow 1$  to 2 do
(4)   | for  $j \leftarrow k + 1$  to 3 do
(5)   |   |  $J_{jk} \leftarrow \text{GivRot}(R, j, k)$ 
(6)   |   |  $R \leftarrow J_{jk} \cdot R$ 
(7)   |   |  $Q \leftarrow Q \cdot J_{jk}^T$ 
(8)   | end for
(9) end for

```

Berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 2 \\ 24 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen.

Lösung:

$$A = \underbrace{\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 26 & 19 & 10 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_R$$

Hausaufgabe – LR- und QR-Zerlegung

Diese Hausaufgabe findet sich **komplett** auf StudOn!

Zusätzliche Literatur zur 2. Übung

- [1] T. F. Chan. „On the Existence and Computation of LU-Factorizations with Small Pivots“. In: *Mathematics of Computation* 42.166 (Apr. 1984), S. 535. DOI: 10.2307/2007600. URL: <https://doi.org/10.2307/2007600>.
- [2] X.-W. Chang. In: *Bit Numerical Mathematics* 42.1 (2002), S. 66–83. DOI: 10.1023/a:1021970102451. URL: <https://doi.org/10.1023/a:1021970102451>.
- [3] L. Fernández und J. Garcia. „The Performance of Fast Givens Rotations Problem Implemented with MPI Extensions in Multicomputers“. In: (Dez. 1999).
- [4] W. Ford. *Numerical Linear Algebra with Applications*. Elsevier, 2015. DOI: 10.1016/c2011-0-07533-6. URL: <https://doi.org/10.1016/c2011-0-07533-6>.

- [5] C. Gauss. *Disquisitio de elementis ellipticis palladis ex opposiotionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. 1810.* URL: <https://books.google.de/books?id=j21FGwAACAAJ>.
- [6] G. H. Golub und C. F. van Loan. *Matrix Computations*. Fourth. JHU Press, 2013. ISBN: 9781421407944. URL: <http://www.cs.cornell.edu/cv/GVL4/golubandvanloan.htm>.
- [7] N. Higham. „Gaussian elimination“. In: 2011. URL: <https://www.maths.manchester.ac.uk/~higham/papers/high11g.pdf>.
- [8] A. S. Householder. „A Class of Methods for Inverting Matrices“. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 6.2 (1958), S. 189–195. ISSN: 03684245. URL: <http://www.jstor.org/stable/2098735>.

- [9] A. S. Householder. „Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix“. In: *Journal of the ACM* 5.4 (Okt. 1958), S. 339–342. DOI: 10.1145/320941.320947. URL: <https://doi.org/10.1145/320941.320947>.
- [10] L. Neal und G. Poole. „A geometric analysis of Gaussian elimination. II“. In: *Linear Algebra and its Applications* 173 (Aug. 1992), S. 239–264. DOI: 10.1016/0024-3795(92)90432-a. URL: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(92\)90432-a](https://doi.org/10.1016/0024-3795(92)90432-a).
- [11] G. Poole und L. Neal. „A geometric analysis of Gaussian elimination. I“. In: *Linear Algebra and its Applications* 149 (1991), S. 249–272. ISSN: 0024-3795. DOI: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(91\)90337-V](https://doi.org/10.1016/0024-3795(91)90337-V). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002437959190337V>.

- [12] G. Poole und L. Neal. „The Rook's pivoting strategy“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123.1-2 (Nov. 2000), S. 353–369. DOI: 10.1016/s0377-0427(00)00406-4. URL: [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00406-4](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00406-4).
- [13] G. Strang. *Linear algebra and learning from data*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2019. ISBN: 978-06921963-8-0.
- [14] L. N. Trefethen. „Three mysteries of Gaussian elimination“. In: *ACM SIGNUM Newsletter* 20.4 (Okt. 1985), S. 2–5. DOI: 10.1145/1057954.1057955. URL: <https://doi.org/10.1145/1057954.1057955>.

Anhang

Wir wollen hier aus Zeit- und Platzgründen den ausgelassenen Beweis der Teilaufgaben b und c von Aufgabe 1 nachholen:

Beweis

Der hier ausgeführte Beweis ist eher technischer Art und zeigt, dass das Produkt der Matrizen L und R gleich der Matrix A ist.

Wir sehen schnell ein, dass für das Produkt der beiden Matrizen L und R gilt:

$$LR = \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ r_1 l_1 & r_2 + c_1 l_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & r_{m-1} l_{m-1} & r_m + c_{m-1} l_{m-1} \end{pmatrix}$$

Das überprüft man einfach eintragsweise mit den jeweiligen Spalten und Zeilen aus L resp. R .

Beweis (Fort.)

Schaut man sich dabei die Einträge etwas genauer an, so stellt man fest:

- $(LR)_{1,1} = r_1 = \frac{\delta_1}{\delta_0} = b_1$
- $(LR)_{k,k+1} = c_k$ für $1 \leq k \leq m-1$
- $(LR)_{k,k-1} = r_k \ell_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \cdot a_k \cdot \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} = a_k$ für $2 \leq k \leq m$
- $(LR)_{k,k} = r_k + c_{k-1} \cdot \ell_{k-1} = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} + c_{k-1} \cdot a_{k-1} \cdot \frac{\delta_{k-2}}{\delta_{k-1}} = b_k$ für $2 \leq k \leq m$
- $(LR)_{k,l} = 0$ für $|k-l| \geq 2$.

Doch damit gilt dann $LR = A$. □