Übungen zur Grundlagen der Technischen Informatik

Übung 5 – Schaltfunktionen und Logik

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wintersemester 2018/19

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

TECHNISCHE FAKULTÄT

Was machen wir heute?

Organisatorisches

Was machen wir heute?

Organisatorisches

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

Was machen wir heute?

Organisatorisches

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

Aufgabe 2 – Logik

Organisatorisches

design

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

TECHNISCHE FAKULTÄT

Achtung – Miniklausur

Achtung – Miniklausur

Diesen Donnerstag – am 29. November 2018 – findet die erste Miniklausur statt.

Wo?	im H7
Wann?	Wir starten um 16:15 Uhr!
	*Seid bitte deswegen schon **ungefähr** 3 – 5 **Minuten** vor Beginn da.*
Worum gehts?	Um den Übungsstoff bis Blatt 5 – sprich heute –
	und den Vorlesungsstoff bis einschließlich zum 27.11.2018

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

a) Geben Sie für die folgenden Schaltfunktionen jeweils die Funktionstabelle, ein Symmetriediagramm, ein Binary Decision Diagram und ein Gatterschaltnetz an:

   i) $f_1(x, y) = x \oplus y$

   ii) $f_2(x, y, z) = (x + y)z$

   iii) $f_3(x, y, z) = xy\bar{z} + \overline{x + \bar{y} + z}$

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Konjunktion – $\wedge$

Wir definieren die Konjunktion $x \wedge y \equiv x \cdot y$ über die Wahrheitstabelle rechts.
Konjunktionen werden in der theoretischen Informatik und Mathematik meistens mit dem Symbol $\wedge$ dargestellt, wir verwenden dafür das Multiplikationssymbol $\cdot$.

$x\,y$	$x \cdot y$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

Disjunktion – $\vee$

Wir definieren die Disjunktion $x \vee y \equiv x + y$ über die Wahrheitstabelle rechts.
Konjunktionen werden in der theoretischen Informatik und Mathematik meistens mit dem Symbol $\vee$ dargestellt, wir verwenden dafür das Additionssymbol $+$.

$x\,y$	$x + y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Negation – $\overline{}$

Wir definieren die Negation $\bar{x}$ über die Wahrheitstabelle rechts.
Wir stellen Negationen durch einen Querstrich über der negierten Formel $\overline{}$ dar.

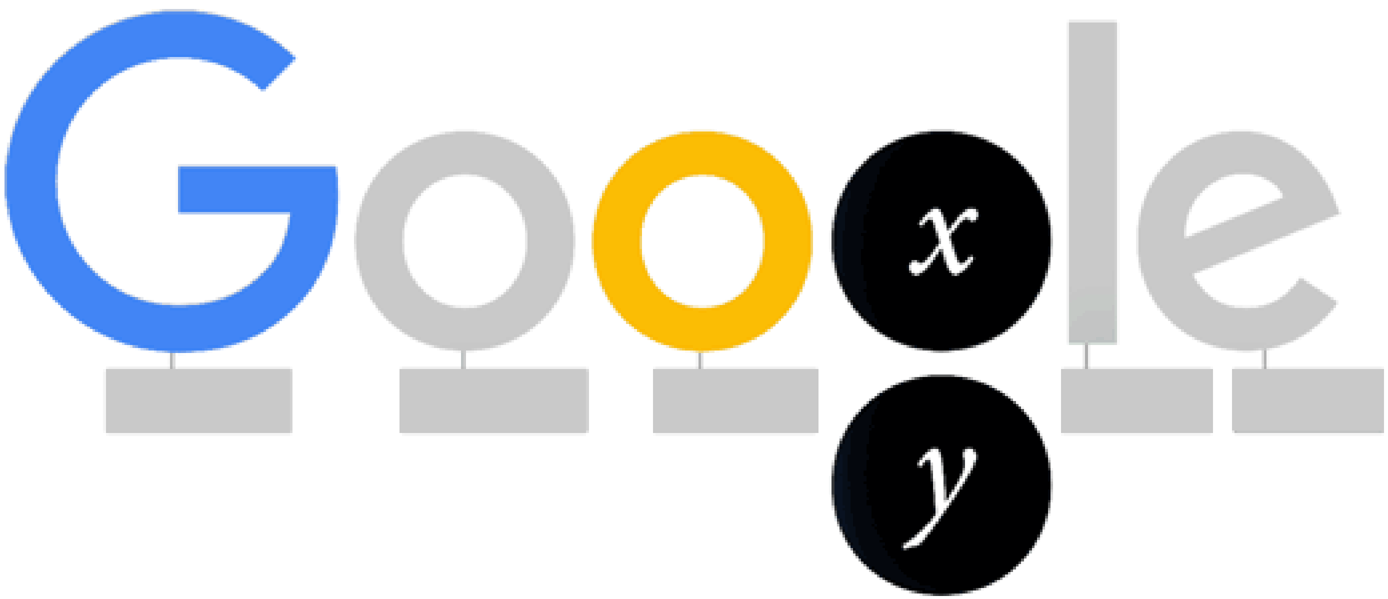
x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Exklusive Disjunktion – $\oplus$

Wir definieren die exklusive Disjunktion $x \oplus y$ wie folgt:

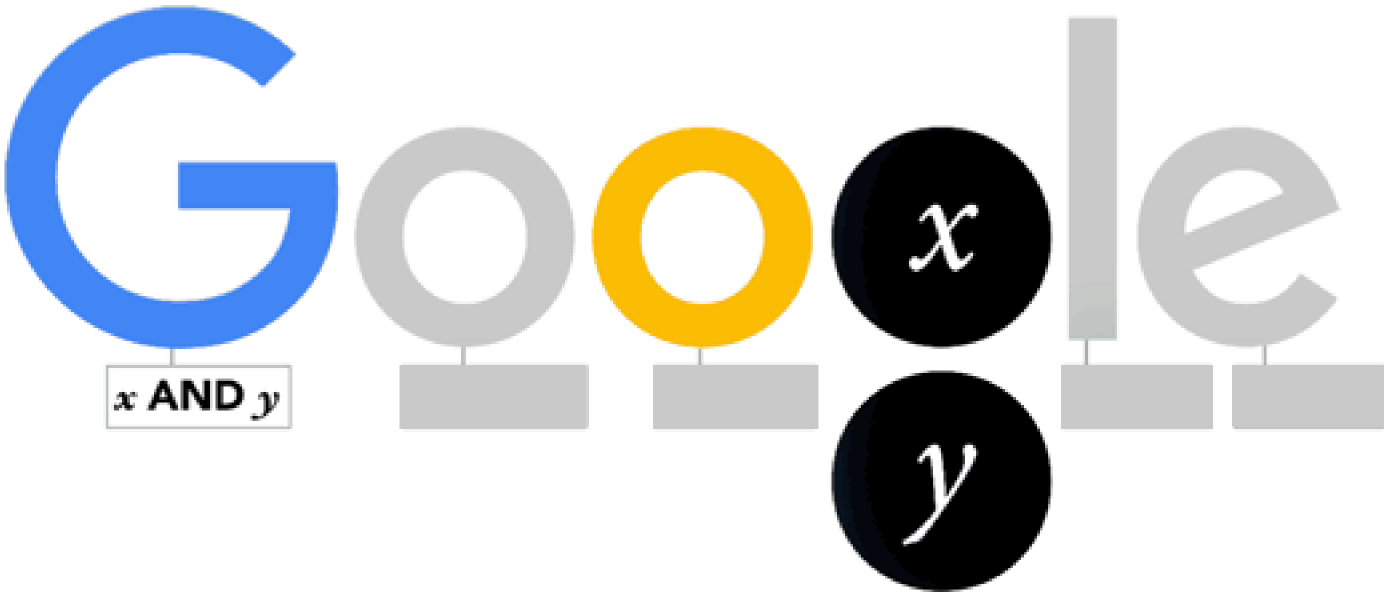
$$x \oplus y \equiv x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y$$

Schaltfunktionen – Google-Doodle



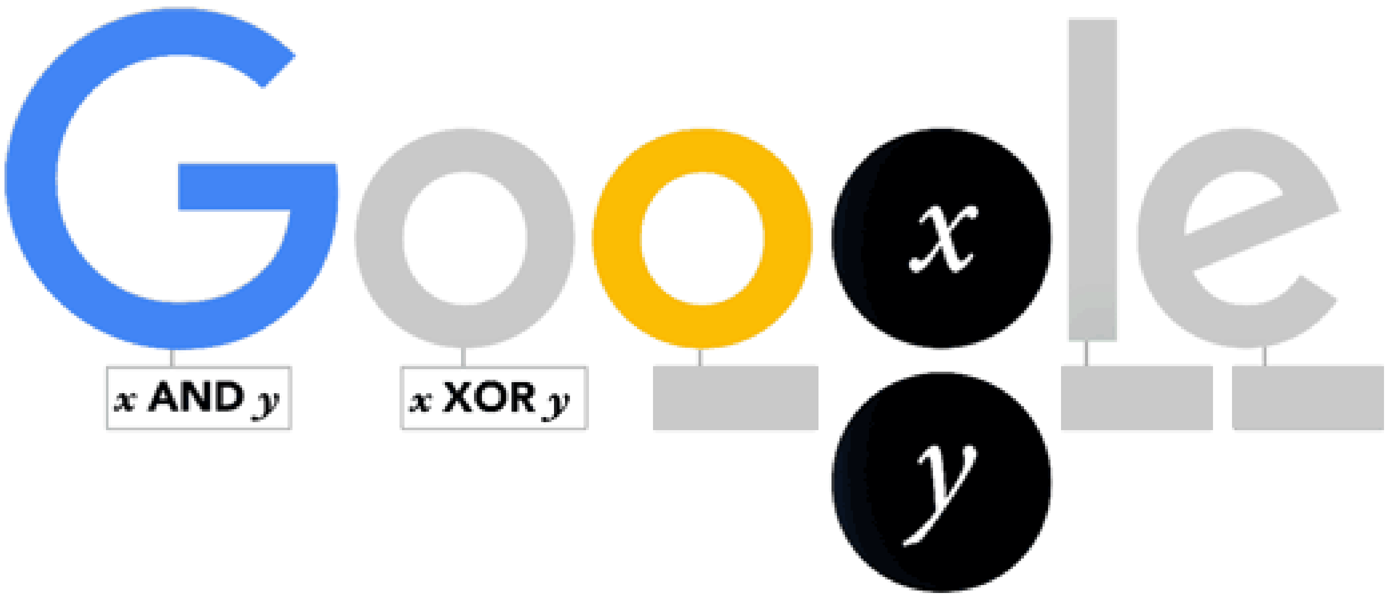
Quelle: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

Schaltfunktionen – Google-Doodle



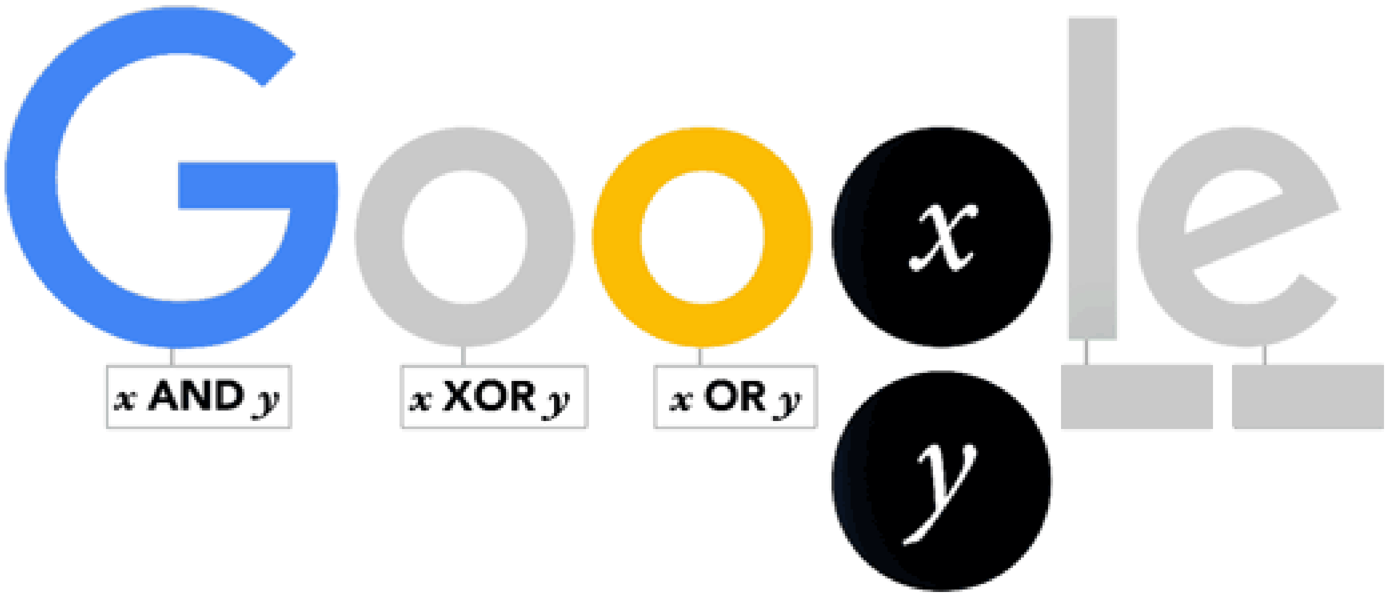
Quelle: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

Schaltfunktionen – Google-Doodle



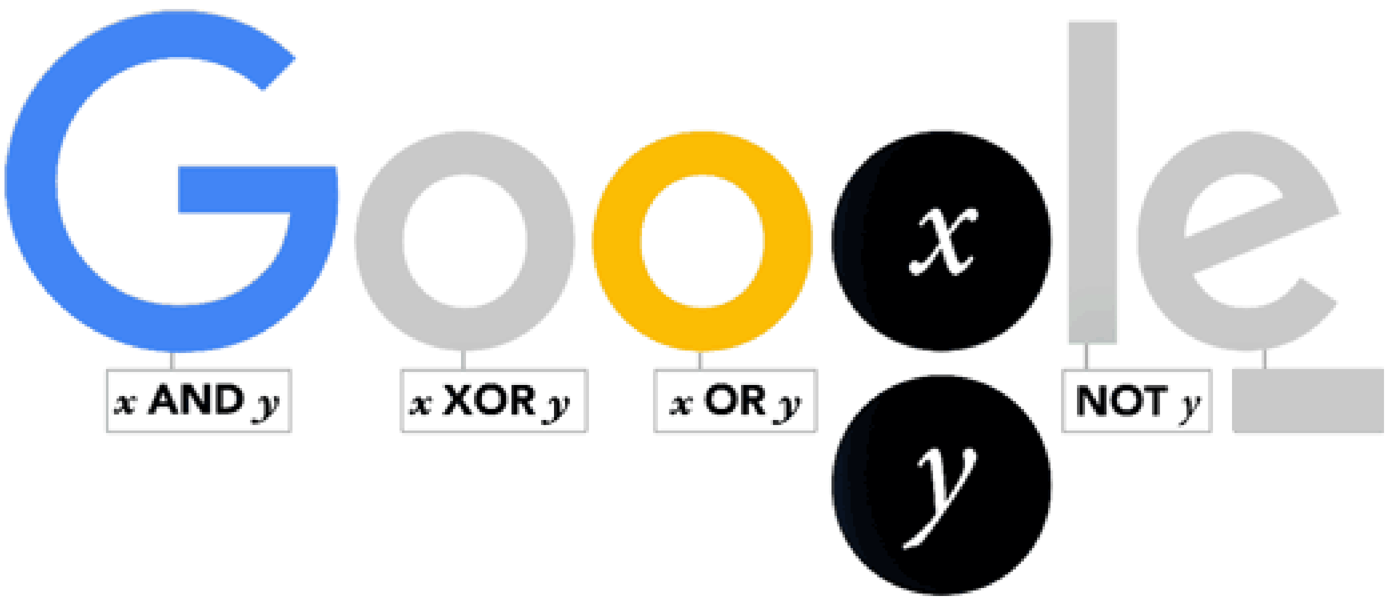
Quelle: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

Schaltfunktionen – Google-Doodle



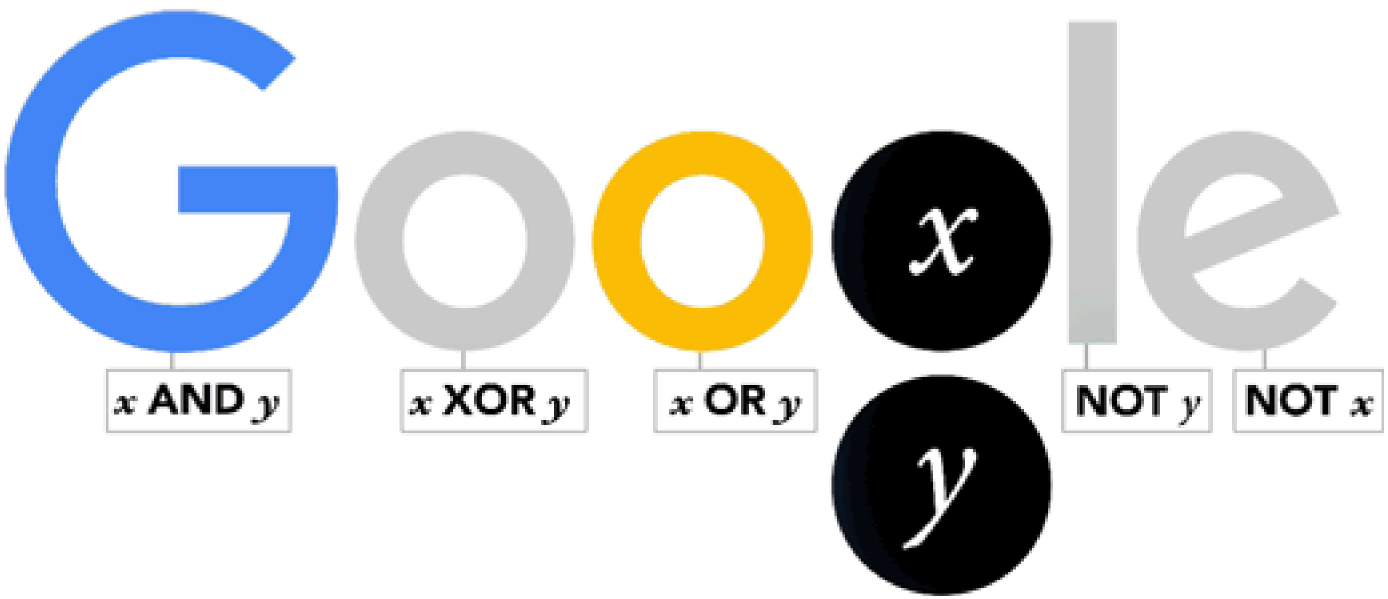
Quelle: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

Schaltfunktionen – Google-Doodle



Quelle: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

Schaltfunktionen – Google-Doodle



Quelle: https://www.google.com/doodles/george-booles-200th-birthday

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

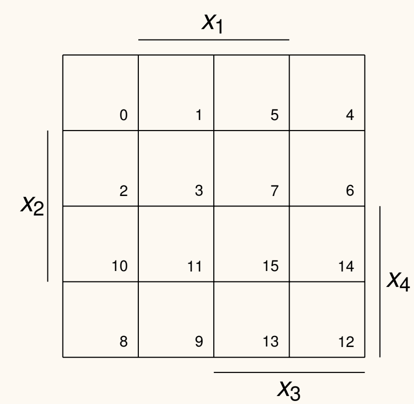
Wahrheitstabelle oder Funktionstabelle

Die Funktionstabelle einer Schaltfunktion f enthält die Funktionswerte für **alle** Permutationen der Variablenwerte.
Bei n Variablen gibt es somit 2^n Zeilen in der Funktionstabelle.

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Symmetriediagramm

Darstellung der Funktionswerte in einer Matrix. Dabei steht jede Zelle für eine mögliche Wahrheitsbelegung. Rechts ein Beispiel für ein Symmetriediagramm mit 4 Variablen.

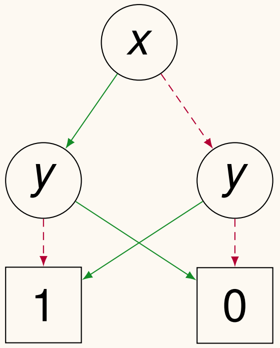


$\rightsquigarrow$ Die Konstruktion erfolgt über Spiegelung an abwechselnden Seiten (siehe Tafel)

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Binary Decision Diagram

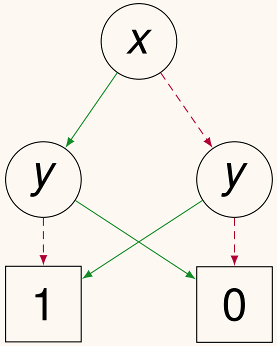
Bei Binary Decision Diagrams (BDD) werden die Funktionstabellen graphisch in Baumform dargestellt. Man erzeugt einen BDD durch eine Fallunterscheidung bei allen in dem Term vorkommenden Variablen. Ein Beispiel ist rechts zu sehen.



Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Binary Decision Diagram

Bei Binary Decision Diagrams (BDD) werden die Funktionstabellen graphisch in Baumform dargestellt. Man erzeugt einen BDD durch eine Fallunterscheidung bei allen in dem Term vorkommenden Variablen. Ein Beispiel ist rechts zu sehen.



Problem 1

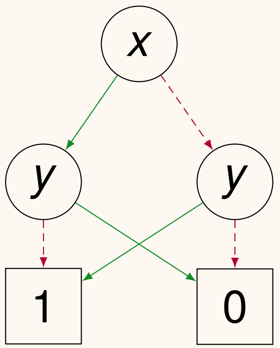
Zu einer Schaltfunktion mit n Variablen ergeben sich $n!$ verschiedene BDDs.
$\rightsquigarrow$ Wir bemühen uns die „Entwicklungsreihenfolge" fest vorzugeben, dann ist der BDD eindeutig.

ORDERED BINARY DECISION DIAGRAMM (OBDD)

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Binary Decision Diagram

Bei Binary Decision Diagrams (BDD) werden die Funktionstabellen graphisch in Baumform dargestellt. Man erzeugt einen BDD durch eine Fallunterscheidung bei allen in dem Term vorkommenden Variablen. Ein Beispiel ist rechts zu sehen.



Problem 2

Zu einer Schaltfunktion mit n Variablen gibt es bei einem BDD insgesamt $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ Knoten.

$\rightsquigarrow$ Fasse deswegen „isomorphe" Teilbäume zusammen und eliminiere Knoten, deren beider Kindknoten „isomorph" sind.

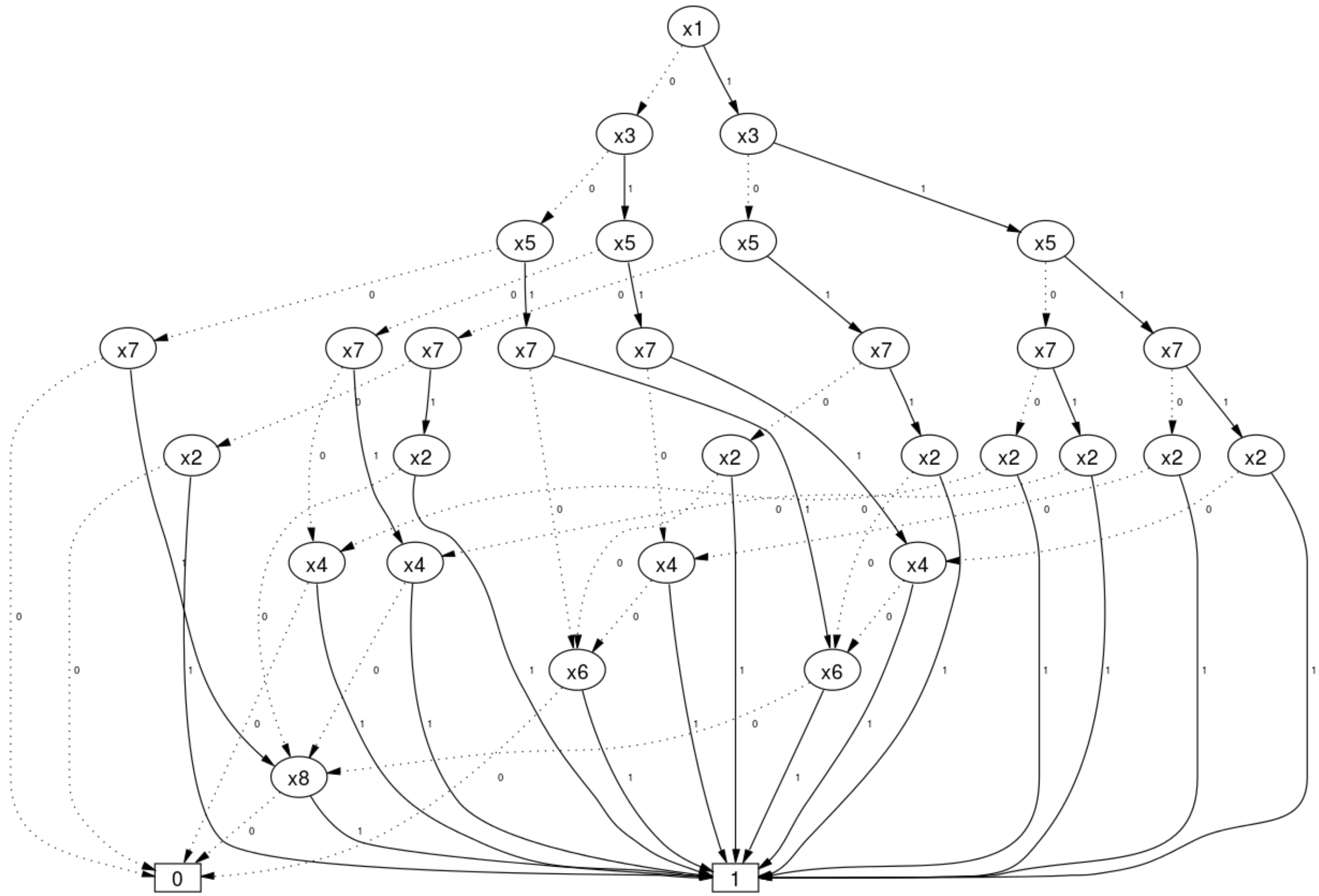
REDUCED BINARY DECISION DIAGRAMM (RBDD)

Warum die Reihenfolge eine Rolle spielt ...

Sei $f_9(x_1, ..., x_8) = (x_1 x_2) + (x_3 x_4) + (x_5 x_6) + (x_7 x_8)$ gegeben. Stellen wir nun den Baum in Reihenfolge $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_2, x_4, x_6, x_8)$.
Dabei kommt folgender BDD raus:

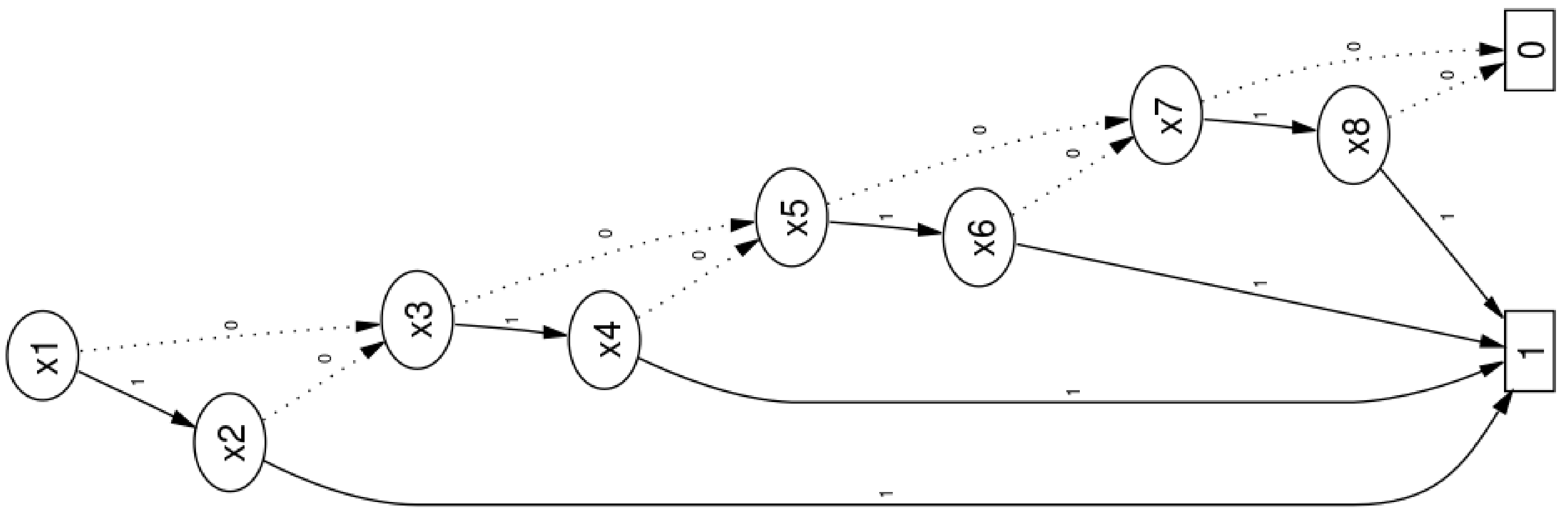
Warum die Reihenfolge eine Rolle spielt ...

Sei $f_9(x_1, ..., x_8) = (x_1 x_2) + (x_3 x_4) + (x_5 x_6) + (x_7 x_8)$ gegeben. Stellen wir nun den Baum in Reihenfolge $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_2, x_4, x_6, x_8)$.
Dabei kommt folgender BDD raus:



Warum die Reihenfolge eine Rolle spielt ...

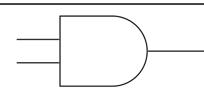
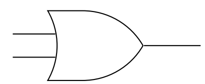
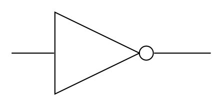
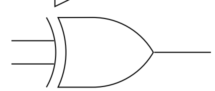
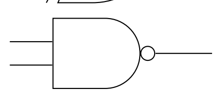
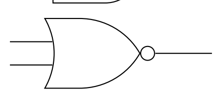
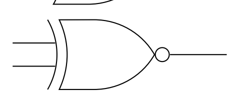
Sei $f_9(x_1, \ldots, x_8) = (x_1 x_2) + (x_3 x_4) + (x_5 x_6) + (x_7 x_8)$ gegeben. Stellen wir nun den Baum in Reihenfolge $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$.
Dabei kommt folgender BDD raus:



Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

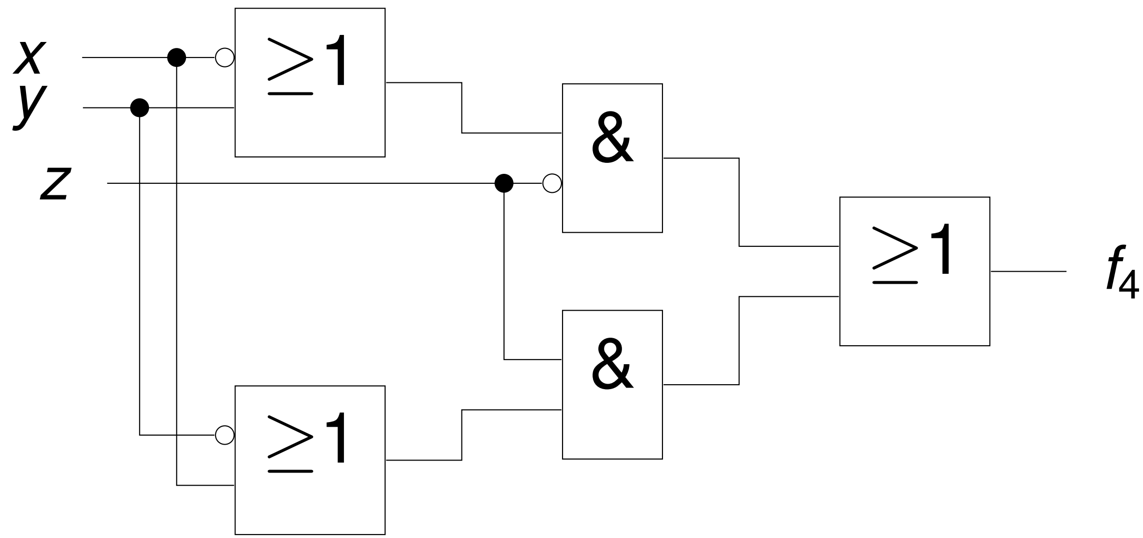
Logikgatter

Schaltfunktionen können auch durch Gattersymbole visualisiert werden. Dabei wird jeder Operation (jedem Junktor) ein Symbol zugewiesen, der Ausgang ist die Funktion des Gatters angewandt auf **alle** Eingänge.

Funktion	Symbol (IEEE)	Symbol (DIN)
AND		&
OR		≥ 1
NOT		1
XOR		=1
NAND		&
NOR		≥ 1
XNOR		=1

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

b) Geben Sie für folgendes Gatterschaltnetz eine Schaltfunktion $f_4(x, y, z)$ an:



Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

c) Geben Sie für die in folgender Funktionstabelle beschriebene Schaltfunktion $f_5(x_3, x_2, x_1, x_0)$ sowohl eine disjunktive als auch eine konjunktive Normalform an:

$x_3 x_2 x_1 x_0$	f_5	$x_3 x_2 x_1 x_0$	f_5	$x_3 x_2 x_1 x_0$	f_5	$x_3 x_2 x_1 x_0$	f_5
0 0 0 0	1	0 1 0 0	0	1 0 0 0	0	1 1 0 0	1
0 0 0 1	0	0 1 0 1	1	1 0 0 1	1	1 1 0 1	0
0 0 1 0	0	0 1 1 0	1	1 0 1 0	1	1 1 1 0	0
0 0 1 1	1	0 1 1 1	0	1 0 1 1	0	1 1 1 1	1

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Merkhilfe: Minterme

Minterme überdecken nur eine Einsstelle in unserem Symmetriediagramm.

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Merkhilfe: Minterme

Minterme überdecken nur eine Einsstelle in unserem Symmetriediagramm.

Disjunktive Normalform (DNF)

Disjunktion **aller** Minterme. Heißt:

$$\mathrm{DNF}(\varphi) = \bigvee_{i=1}^{\text{Anzahl an Mintermen}} \left(\bigwedge_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Merkhilfe: Minterme

Minterme überdecken nur eine Einsstelle in unserem Symmetriediagramm.

Disjunktive Normalform (DNF)

Disjunktion **aller** Minterme. Heißt:

$$\text{DNF}(\varphi) = \bigvee_{i=1}^{\text{Anzahl an Mintermen}} \left(\bigwedge_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Beispiel: Minterme und DNF

Seien die Literale festgelegt als x, y und z. Sei $f_{ed}(x, y, z) = \bar{y}$ gegeben. So sind die Terme $x \cdot \bar{y} \cdot z$ oder $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ beispielsweise Minterme.
Die DNF von f_{ed} hingegen lautet $(x \cdot \bar{y} \cdot z) + (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z) + (x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) + (\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})$

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Merkhilfe: Maxterme

Maxterme überdecken nur eine Nullstelle in unserem Symmetriediagramm.

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Merkhilfe: Maxterme

Maxterme überdecken nur eine Nullstelle in unserem Symmetriediagramm.

Konjunktive Normalform (KNF)

Konjunktion **aller** Maxterme. Heißt:

$$\mathrm{KNF}(\varphi) = \bigwedge_{i=1}^{\text{Anzahl an Maxtermen}} \left(\bigvee_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen: Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Merkhilfe: Maxterme

Maxterme überdecken nur eine Nullstelle in unserem Symmetriediagramm.

Konjunktive Normalform (KNF)

Konjunktion **aller** Maxterme. Heißt:

$$\mathrm{KNF}(\varphi) = \bigwedge_{i=1}^{\text{Anzahl an Maxtermen}} \left(\bigvee_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Beispiel: Maxterme und KNF

Seien die Literale festgelegt als x, y und z. Sei $f_{ed}(x, y, z) = \bar{y}$ gegeben. So sind die Terme $\bar{x} + \bar{y} + z$ oder $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ beispielsweise Maxterme.
Die KNF von f_{ed} hingegen lautet $(x + \bar{y} + z) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

Aufgabe 1 – Darstellung von Schaltfunktionen

d) Geben Sie für die in folgendem Symmetriediagramm beschriebene Schaltfunktion $f_6(x_3, x_2, x_1, x_0)$ sowohl eine disjunktive als auch eine konjunktive Normalform an:

		x_0	x_0		
	1_{0}	0_{1}	0_{5}	1_{4}	
x_1	0_{2}	1_{3}	1_{7}	0_{6}	
x_1	0_{10}	1_{11}	1_{15}	0_{14}	x_3
	1_{8}	0_{9}	0_{13}	1_{12}	x_3
			x_2	x_2	

Aufgabe 2 – Logik

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 2 – Logik

Fünf ehemalige Zuschauer eines Fußballturniers haben versucht, sich an die damalige Rangliste zu erinnern und machten dabei die folgenden Aussagen:

- Mannschaft A belegte den 2. Platz und Mannschaft B den 5.
- Mannschaft C belegte den 2. Platz und Mannschaft D den 3.
- Mannschaft F belegte den 1. Platz und Mannschaft B den 3.
- Mannschaft A belegte den 3. Platz und Mannschaft E den 6.
- Mannschaft C belegte den 3. Platz und Mannschaft E den 4.

Später stellte sich heraus, dass jeder Zuschauer sich in einer seiner beiden Aussagen geirrt hatte.

Rekonstruieren Sie die richtige Platzverteilung.