Übungen zur Grundlagen der Technischen Informatik

Übung 6 – Normalformen, Minimalformen und der Entwicklungssatz

Florian Frank

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wintersemester 2018/19

Was machen wir heute?

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra — Beweise

Aufgabe 2 – DNF — DF — KF

Aufgabe 3 – Relaisschaltnetze

Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Zusatzaufgabe – Nutzen des Entwicklungssatzes

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra — Beweise

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra — Beweise

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, ohne Wahrheitstabellen zu verwenden. Für Aussagen, die nicht wahr sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Für Aussagen, die wahr sind, geben Sie die entsprechenden Regeln an, mit welchen die Eigenschaft bewiesen werden kann.

a) $\overline{x} \oplus (x + y) = x + \overline{y}$

b) $(x + y) \cdot (x + y \cdot z) = x + y \cdot z$

c) $a \cdot b + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot c \cdot \overline{d} = a \cdot b + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$

d) $x \cdot y + x \cdot (y + z) = x \cdot (y + z)$

e) $a \cdot b + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot c \cdot \overline{d} = a \cdot b + c \cdot \overline{d}$

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit zwei Verknüpfungen $\top$ und $\perp$ auf B ist eine **boolesche Algebra** gdw. für alle Elemente $a, b, c \in B$ gilt:

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit zwei Verknüpfungen $\top$ und $\perp$ auf B ist eine **boolesche Algebra** gdw. für alle Elemente $a, b, c \in B$ gilt:

(1) **Abgeschlossenheit** der Operationen – implizit mit „... Verknüpfungen auf B“ gefordert.

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit zwei Verknüpfungen $\top$ und $\perp$ auf B ist eine **boolesche Algebra** gdw. für alle Elemente $a, b, c \in B$ gilt:

(1) **Abgeschlossenheit** der Operationen – implizit mit „... Verknüpfungen auf B“ gefordert.

(2) **Kommutativität** der Operationen:

$$a \top b \equiv b \top a \quad \text{und} \quad a \perp b \equiv b \perp a$$

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit zwei Verknüpfungen $\top$ und $\perp$ auf B ist eine **boolesche Algebra** gdw. für alle Elemente $a, b, c \in B$ gilt:

(1) **Abgeschlossenheit** der Operationen – implizit mit „... Verknüpfungen auf B“ gefordert.

(2) **Kommutativität** der Operationen:

$$a \top b \equiv b \top a \quad \text{und} \quad a \perp b \equiv b \perp a$$

(3) **Distributivität** der Operationen:

$$a \top (b \perp c) \equiv (a \top b) \perp (a \top c) \quad \text{und} \quad a \perp (b \top c) \equiv (a \perp b) \top (a \perp c)$$

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit zwei Verknüpfungen $\top$ und $\perp$ auf B ist eine **boolesche Algebra** gdw. für alle Elemente $a, b, c \in B$ gilt:

(1) **Abgeschlossenheit** der Operationen – implizit mit „... Verknüpfungen auf B“ gefordert.

(2) **Kommutativität** der Operationen:

$$a \top b \equiv b \top a \quad \text{und} \quad a \perp b \equiv b \perp a$$

(3) **Distributivität** der Operationen:

$$a \top (b \perp c) \equiv (a \top b) \perp (a \top c) \quad \text{und} \quad a \perp (b \top c) \equiv (a \perp b) \top (a \perp c)$$

(4) Existenz **neutraler** Elemente:

$$\exists 0, 1 \in B : a \top 1 \equiv a \quad \text{und} \quad a \perp 0 \equiv a$$

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Definition (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit zwei Verknüpfungen $\top$ und $\perp$ auf B ist eine **boolesche Algebra** gdw. für alle Elemente $a, b, c \in B$ gilt:

(1) **Abgeschlossenheit** der Operationen – implizit mit „... Verknüpfungen auf B“ gefordert.

(2) **Kommutativität** der Operationen:

$$a \top b \equiv b \top a \quad \text{und} \quad a \perp b \equiv b \perp a$$

(3) **Distributivität** der Operationen:

$$a \top (b \perp c) \equiv (a \top b) \perp (a \top c) \quad \text{und} \quad a \perp (b \top c) \equiv (a \perp b) \top (a \perp c)$$

(4) Existenz **neutraler** Elemente:

$$\exists 0, 1 \in B : a \top 1 \equiv a \quad \text{und} \quad a \perp 0 \equiv a$$

(5) Existenz von **Komplementen** $\overline{a}$:

$$\exists \overline{a} \in B : a \top \overline{a} \equiv 0 \quad \text{und} \quad a \perp \overline{a} \equiv 1$$

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Dualitätsprinzip von de Morgan

Zu jeder existierenden Formel für eine boolesche Algebra existiert auch eine **duale** Formel, die entsteht, wenn man $\top$ und $\perp$ sowie 1 und 0 vertauscht.

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra: Begriffsklärung

Mit der axiomatischen Definition ergeben sich folgende „Rechenregeln“:

Abk.	Regelname	Verwendung
(KG)	Kommutativgesetz	$a + b \equiv b + a$ und $a \cdot b \equiv b \cdot a$
(AG)	Assoziativgesetz	$a + (b + c) \equiv (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) \equiv (a \cdot b) \cdot c$
(IG)	Idempotenzgesetz	$a + a \equiv a$ und $a \cdot a \equiv a$
(DG)	Distribution	$a + (b \cdot c) \equiv (a + b) \cdot (a + c)$ $a \cdot (b + c) \equiv (a \cdot b) + (a \cdot c)$
(NG)	Neutralitätsgesetz	$a + 0 \equiv a$ und $a \cdot 1 \equiv a$
(EG)	Extremalgesetz	$a + 1 \equiv 1$ und $a \cdot 0 \equiv 0$
(IN)	Involution	$\overline{\overline{a}} \equiv a$
(DM)	De Morgansche Gesetze	$\overline{a + b} \equiv \overline{a} \cdot \overline{b}$ und $\overline{ab} \equiv \overline{a} + \overline{b}$
($\overline{\text{K}}$G)	Komplementärgesetz	$a + \overline{a} \equiv 1$ und $a \cdot \overline{a} \equiv 0$
(DT)	Dualitätsgesetz	$\overline{0} \equiv 1$ und $\overline{1} \equiv 0$
(AB)	Absorption	$a \cdot (a + b) \equiv a$ und $a + (a \cdot b) \equiv a$
(KO)	Konsensus	$(a \cdot b) + (\overline{a} \cdot c) + (b \cdot c) \equiv (a \cdot b) + (\overline{a} \cdot c)$ $(a + b) \cdot (\overline{a} + c) \cdot (b + c) \equiv (a + b) \cdot (\overline{a} + c)$

Aufgabe 1 – Boolesche Algebra — Beweise

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, ohne Wahrheitstabellen zu verwenden. Für Aussagen, die nicht wahr sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Für Aussagen, die wahr sind, geben Sie die entsprechenden Regeln an, mit welchen die Eigenschaft bewiesen werden kann.

a) $\overline{x} \oplus (x + y) = x + \overline{y}$

b) $(x + y) \cdot (x + y \cdot z) = x + y \cdot z$

c) $a \cdot b + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot c \cdot \overline{d} = a \cdot b + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$

d) $x \cdot y + x \cdot (y + z) = x \cdot (y + z)$

e) $a \cdot b + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot c \cdot \overline{d} = a \cdot b + c \cdot \overline{d}$

Aufgabe 2 – DNF — DF — KF

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG

TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 2 – DNF — DF — KF

a) Bestimmen Sie jeweils die disjunktive Normalform (DNF) der folgenden Funktionen:
   i) $f_1(x, y, z) = xyz + \overline{x}y + \overline{y}z$
   ii) $f_2(x, y, z) = xy + \overline{xy}z + x\overline{yz}$

b) Bestimmen Sie die primären (Summe der Anzahl verundeter Literale) und sekundären Kosten (Anzahl veroderter Terme) von f_1 und f_2 sowie derer DNFs. Geben Sie auch die Gesamtkosten an.

c) Bringen Sie die folgende Funktion in disjunktive Form (DF):

$$f_3(w, x, y, z) = (\overline{w} + z) \cdot (\overline{w} + x + y) \cdot (x + \overline{y} + z)$$

d) Bringen Sie die folgenden Funktionen in konjunktive Form (KF):
   i) $f_4(x, y, z) = xyz + \overline{x}y + \overline{y}z$
   ii) $f_5(w, x, y, z) = wx + \overline{wz} + w\overline{yz}$

e) Wie unterscheiden sich die technischen Realisierungen der beiden Formen?

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Merkhilfe: Minterme

Minterme überdecken nur eine Einsstelle in unserem Symmetriediagramm.

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Merkhilfe: Minterme

Minterme überdecken nur eine Einsstelle in unserem Symmetriediagramm.

Disjunktive Normalform (DNF)

Disjunktion **aller** Minterme. Heißt:

$$\mathrm{DNF}(\varphi) = \bigvee_{i=1}^{\text{Anzahl an Mintermen}} \left(\bigwedge_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Minterm (Vollkonjunktion)

Minterme sind eine reine Konjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 1 ist.

Merkhilfe: Minterme

Minterme überdecken nur eine Einsstelle in unserem Symmetriediagramm.

Disjunktive Normalform (DNF)

Disjunktion **aller** Minterme. Heißt:

$$\text{DNF}(\varphi) = \bigvee_{i=1}^{\text{Anzahl an Mintermen}} \left(\bigwedge_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Disjunktive Form (DF)

Ein Term ist in disjunktiver Form, wenn er als Disjunktion von Konjunktionen dargestellt werden kann (Summe von Produkten (SoP)).

Beispiel: $(x_1 \cdot x_2) + (x_3 \cdot \overline{x_1})$ ist in disjunktiver Form.

Beispiel: $((x_1 \cdot x_2) + x_3) \cdot \overline{x_1}$ ist **nicht** in disjunktiver Form.

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Merkhilfe: Maxterme

Maxterme überdecken nur eine Nullstelle in unserem Symmetriediagramm.

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Merkhilfe: Maxterme

Maxterme überdecken nur eine Nullstelle in unserem Symmetriediagramm.

Konjunktive Normalform (KNF)

Konjunktion **aller** Maxterme. Heißt:

$$\text{KNF}(\varphi) = \bigwedge_{i=1}^{\text{Anzahl an Mintermen}} \left(\bigvee_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Wiederholung – Übung 5, Begriffsklärung

Maxterm (Volldisjunktion)

Maxterme sind eine reine Disjunktion **aller** existierenden Literale in negierter oder nicht negierter Form, deren Funktionswert 0 ist.

Merkhilfe: Maxterme

Maxterme überdecken nur eine Nullstelle in unserem Symmetriediagramm.

Konjunktive Normalform (KNF)

Konjunktion **aller** Maxterme. Heißt:

$$\mathrm{KNF}(\varphi) = \bigwedge_{i=1}^{\text{Anzahl an Mintermen}} \left(\bigvee_{j=1}^{\text{Anzahl an Literalen}} L_j \right)$$

Konjunktive Form (KF)

Ein Term ist in konjunktiver Form, wenn er als Konjunktion von Disjunktionen dargestellt werden kann (Produkt von Summen (PoS)).
Beispiel: $(x_1 + x_2) \cdot (x_3 + \overline{x_1})$ ist in konjunktiver Form.
Beispiel: $((x_1 \cdot x_2) + x_3) \cdot \overline{x_1}$ ist **nicht** in konjunktiver Form.

Aufgabe 2 – DNF — DF — KF

a) Bestimmen Sie jeweils die disjunktive Normalform (DNF) der folgenden Funktionen:

   i) $f_1(x, y, z) = xyz + \overline{x}y + \overline{y}z$

   ii) $f_2(x, y, z) = xy + \overline{xy}z + x\overline{yz}$

b) Bestimmen Sie die primären (Summe der Anzahl verundeter Literale) und sekundären Kosten (Anzahl veroderter Terme) von f_1 und f_2 sowie derer DNFs. Geben Sie auch die Gesamtkosten an.

c) Bringen Sie die folgende Funktion in disjunktive Form (DF):

   $f_3(w, x, y, z) = (\overline{w} + z) \cdot (\overline{w} + x + y) \cdot (x + \overline{y} + z)$

d) Bringen Sie die folgenden Funktionen in konjunktive Form (KF):

   i) $f_4(x, y, z) = xyz + \overline{x}y + \overline{y}z$

   ii) $f_5(w, x, y, z) = wx + \overline{w}z + w\overline{yz}$

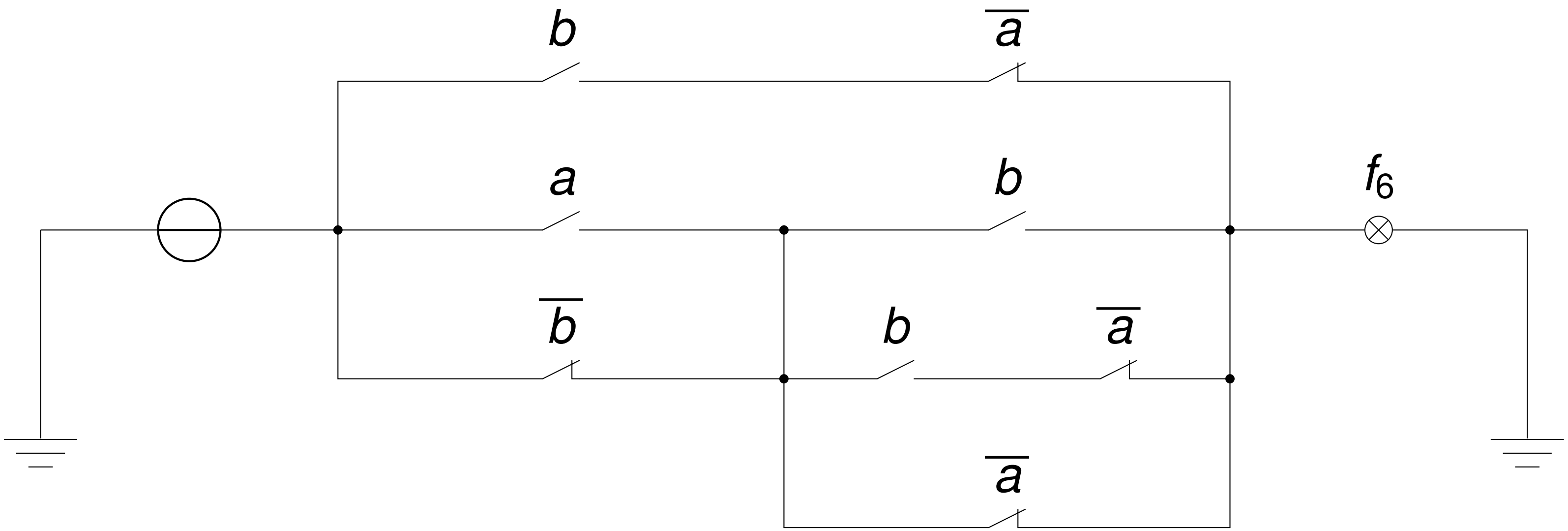
e) Wie unterscheiden sich die technischen Realisierungen der beiden Formen?

Aufgabe 3 – Relaisschaltnetze

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Aufgabe 3 – Relaisschaltnetze

Gegeben sei das im nachstehenden Bild dargestellte Relaisschaltnetz.



a) Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn. Wie wird die realisierte Funktion $f_6(a, b)$ bezeichnet?

b) Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negierte Konjunktion $f_{nk}(a, b) := \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$ realisiert.

Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Sei folgende Schaltfunktion gegeben:

$$f_7(a, b, c, d) = \overline{a\,c} + b + \overline{d}\,\overline{c} + adc$$

a) Entwickeln Sie f_7 mit Variablenordnung b, c, a, d, bis als Restfunktionen nur noch Konstanten (0 oder 1) übrig bleiben. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

b) Zeichnen Sie das resultierende binäre Entscheidungsdiagramm (BDD).

Aufgabe 4 – Entwicklungssatz

Sei folgende Schaltfunktion gegeben:

$$f_7(a, b, c, d) = \overline{a\,c} + b + \overline{d}\,\overline{c} + adc$$

a) Entwickeln Sie f_7 mit Variablenordnung b, c, a, d, bis als Restfunktionen nur noch Konstanten (0 oder 1) übrig bleiben. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

b) Zeichnen Sie das resultierende binäre Entscheidungsdiagramm (BDD).

Shannon'scher Entwicklungssatz

Sei $f : B^n \to B$ eine beliebige boolesche Funktion und $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^T \in B^n$ ein Vektor, an dessen Stelle f ausgewertet wird. Für den Wert der Funktion $f(x)$ gilt dann – unter **Entwicklung** von f nach x_i:

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i \cdot \underbrace{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)}_{\text{Kofaktor } f_{x_i}} + \overline{x_i} \cdot \overbrace{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)}^{\text{Kofaktor } f_{\overline{x_i}}}$$

Zusatzaufgabe – Nutzen des Entwicklungssatzes

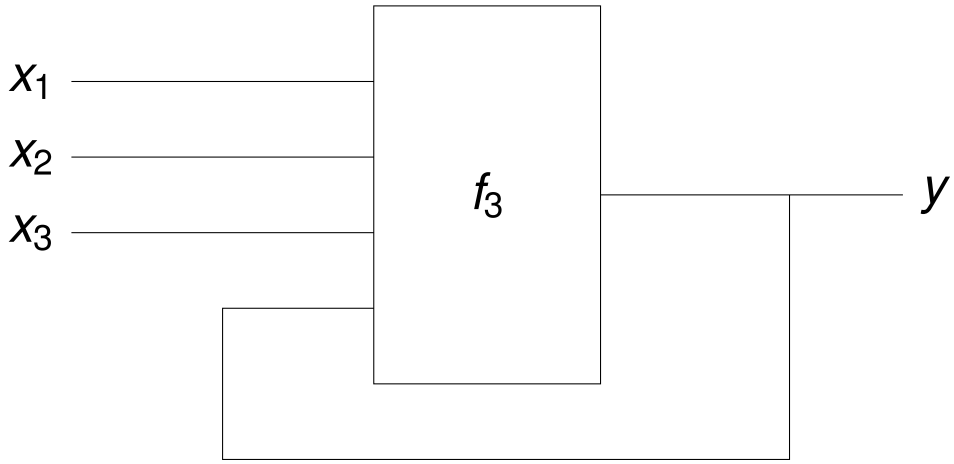
FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Zusatzaufgabe – Nutzen des Entwicklungssatzes

Nehmen Sie an, ein Schaltnetz mit langer Laufzeit und zugehöriger Schaltfunktion

$$y = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

sei folgendermaßen rückgekoppelt:



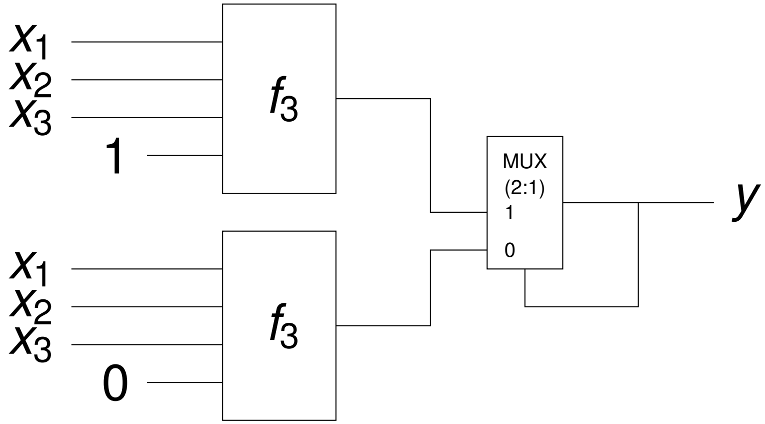
Nutzen Sie den Entwicklungssatz der Schaltalgebra, um den Einfluss der Rückkopplung auf die Laufzeit zu reduzieren und zeichnen Sie das resultierende Schaltnetz.

Lösung der Zusatzaufgabe

Der Trick besteht darin, nach y zu entwickeln:

$$f_3(x_3, x_2, x_1, y) \Leftrightarrow y \cdot f_3(x_3, x_2, x_1, 1) + \overline{y} \cdot f_3(x_3, x_2, x_1, 0)$$

Dadurch besteht die Rückkopplung nur noch daraus, dass y zwischen zwei nicht rückgekoppelten Funktionen auswählt (multiplext):



Entsprechend wird f_3 parallel für beide möglichen Werte von y „vorberechnet" und die langen Schaltzeiten reduziert, falls sich f_3 durch die Rückkopplung ändern sollte. Der Nachteil liegt darin, dass diese Lösung mehr Fläche benötigt (d.h. Anzahl an Gattern und Leitungen).